2023. október 9. Matematika A2a **ZH1 B csoport**

1. Számítsa ki az alábbi improprius integrált. (5 pont)

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{1+(x-1)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{a\to-\infty} \left[\arctan(x-1)\right]_a^0 \\
&= \lim_{a\to-\infty} \left(\arctan(0-1)-\arctan(a-1)\right) \\
&= -\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

2. Legyen $z=-8$. Írja fel trigonometrikus alakban, majd számolja ki a harmadik gyökeit. (5 pont)

Megoldás. $|z|=\sqrt{(-8)^2+0^2}=8$, $z=8(-1+i\cdot 0)=8(\cos\pi+i\sin\pi)$. A harmadik gyökök $\sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+k\frac{2\pi}{3}\right)\right)$, $k=0,1,2$, azaz

$$\begin{aligned}
&2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2\left(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ\right)=1+i\sqrt{3},\\
&2\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=2\left(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ\right)=-2,\\
&2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right)=2\left(\cos 300^\circ+i\sin 300^\circ\right)=1-i\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

3. Számítsa ki az $A(1,0,0)$, $B(0,2,0)$, $C(0,0,3)$ csúcspontú háromszög területét. (5 pont)

Megoldás. Két oldalvektor $\mathbf{v}=\overrightarrow{AB}=(-1,2,0)$ és $\mathbf{w}=\overrightarrow{AC}=(-1,0,3)$,

$$\begin{aligned}
T_{ABC\triangle} &= \frac{1}{2}|\mathbf{v}\times\mathbf{w}| \\
&= \frac{1}{2}|(-\mathbf{i}+2\mathbf{j})\times(-\mathbf{i}+3\mathbf{k})| \\
&= \frac{1}{2}|6\mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}| \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{6^2+3^2+2^2}=\frac{7}{2}.
\end{aligned}$$

4. Számítsa ki az $AB-BA$ mátrixot. (5 pont)

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
AB-BA &= \begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&2\\-3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}-5&10\\-9&22\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}7&10\\9&10\end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix}-12&0\\-18&12\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$