2023. november 20. Matematika A2a **ZH2 A csoport**

1. A $b \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékénél létezik megoldása az alábbi egyenletrendszernek? Határozza is meg a megoldást. (5 pont)

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 3x_2 \quad\;\; &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 &= b \end{aligned}$$

Megoldás. Végezzünk a kibővített mátrixon Gauss-eliminációt:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & b \end{array}\right] \overset{\substack{s_2 - s_1 \\ s_3 - 3s_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -1 & -2 \\ 0 & 14 & -2 & b-9 \end{array}\right] \overset{s_3 - 2s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b-5 \end{array}\right]$$

tehát pontosan akkor létezik megoldás, ha $b = 5$. Mivel az együtthatómátrix rangja 2 és az ismeretlenek száma 3, egy ismeretlen tetszőlegesen megválasztható. A megoldás: $x_3 \in \mathbb{R}$ tetszőleges, $x_2 = \frac{-2+x_3}{7}$, $x_1 = 3 - x_3 + 4x_2 = \frac{13-3x_3}{7}$.

2. Írja fel az $f(x,y) = \frac{2}{x^2+y^2}$ függvény grafikonjának $P(1,1)$ ponthoz tartozó érintősíkját. (5 pont)

Megoldás. A függvényérték az $(1,1)$ pontban $f(1,1) = 1$. A parciális deriváltak

$$f'_x(x,y) = -\frac{2}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2x \qquad\qquad f'_y(x,y) = -\frac{2}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2y,$$

tehát $f'_x(1,1) = f'_y(1,1) = -1$. Az érintősík egyenlete tehát $z = 1-(x-1)-(y-1) = 3-x-y$.

3. Egy $V = 6\,\mathrm{dm}^3$ térfogatú téglatest egyik lapját egy rétegben, a többi lapot két rétegben fogjuk befesteni. Mekkorák legyenek az élei, hogy a lehető legkevesebb festékre legyen szükség? (5 pont)

Megoldás. Legyen az egy rétegben festett lap két oldala $x\,\mathrm{dm}$ és $y\,\mathrm{dm}$, ekkor a harmadik él $z = \frac{6}{xy}\,\mathrm{dm}$ hosszú. A szükséges festékmennyiség minimalizálásához keressük az $f(x,y) = 3xy + 4x\frac{6}{xy} + 4y\frac{6}{xy} = 3xy + \frac{24}{y} + \frac{24}{x}$ függvény minimumhelyét. A parciális deriváltak

$$f'_x(x,y) = 3y - \frac{24}{x^2} \qquad\qquad f'_y(x,y) = 3x - \frac{24}{y^2},$$

az $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$ egyenletrendszer megoldása $x = y = 2$. Ez valóban minimumhely, mert

$$\begin{bmatrix} f''_{xx}(2,2) & f''_{xy}(2,2) \\ f''_{yx}(2,2) & f''_{yy}(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

determinánsa $6 \cdot 6 - 3 \cdot 3 = 27 > 0$ és a főátló elemei pozitívak. Az élek tehát $x = y = 2$, $z = 3$.

4. Állapítsa meg, hogy a $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{2^n}$ sor divergens, feltételesen konvergens vagy abszolút konvergens. (5 pont)

Megoldás. Jelölje a sor tagjait $a_n = (-1)^n \frac{n^2}{2^{n+1}}$, használjuk a gyökkritériumot:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^2}{2^{n+1}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}^2}{\sqrt[n]{2} \cdot 2} = \frac{1}{2} < 1,$$

tehát a sor abszolút konvergens.