2023. november 20. Matematika A2a **ZH2 B csoport**

1. Határozza meg az $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékeit és sajátvektorait. (5 pont)

Megoldás. A karakterisztikus polinom

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ -2 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)\left[(-1-\lambda)(3-\lambda) - 2\cdot(-2)\right] = (1-\lambda)\left[-3+\lambda-3\lambda+\lambda^2+4\right] \\
&= (1-\lambda)\left[\lambda^2-2\lambda+1\right] = (1-\lambda)^3,
\end{aligned}$$

tehát csak a $\lambda = 1$ sajátérték (háromszoros multiplicitással). A sajátvektorok az $(A-\lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai, az együtthatómátrixnak csak két egyforma nem nulla sora van: $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Két komponens szabadon választható, a sajátvektorok $(s+t, 2s, t)$, $s, t \in \mathbb{R}$, $(s,t) \neq (0,0)$.

2. Számítsa ki az $f(x,y) = (x+y)e^x$ függvény gradiensét a $P(0,1)$ pontban, és adja meg ott a $\mathbf{v} = (-1,2)$ irányú iránymenti deriváltat. (5 pont)

Megoldás. A parciális deriváltak

$$f'_x(x,y) = e^x + (x+y)e^x \qquad\qquad f'_y(x,y) = e^x,$$

tehát a gradiens $\operatorname{grad} f(0,1) = (f'_x(0,1), f'_y(0,1)) = (2,1)$. A $\mathbf{v}$ irányú iránymenti derivált $\langle \operatorname{grad} f(0,1), \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\rangle = \frac{1}{|\mathbf{v}|}(2\cdot(-1) + 1\cdot 2) = 0$.

3. Egy $V = 12\,\mathrm{dm}^3$ térfogatú téglatest egyik lapját két rétegben, a többi lapot egy rétegben fogjuk befesteni. Mekkorák legyenek az élei, hogy a lehető legkevesebb festékre legyen szükség? (5 pont)

Megoldás. Legyen a két rétegben festett lap két oldala $x\,\mathrm{dm}$ és $y\,\mathrm{dm}$, ekkor a harmadik él $z = \frac{12}{xy}\,\mathrm{dm}$ hosszú. A szükséges festékmennyiség minimalizálásához keressük az $f(x,y) = 3xy + 2x\frac{12}{xy} + 2y\frac{12}{xy} = 3xy + \frac{24}{y} + \frac{24}{x}$ függvény minimumhelyét. A parciális deriváltak

$$f'_x(x,y) = 3y - \frac{24}{x^2} \qquad\qquad f'_y(x,y) = 3x - \frac{24}{y^2},$$

az $f'_x(x,y) = f'_y(x,y) = 0$ egyenletrendszer megoldása $x = y = 2$. Ez valóban minimumhely, mert

$$\begin{bmatrix} f''_{xx}(2,2) & f''_{xy}(2,2) \\ f''_{yx}(2,2) & f''_{yy}(2,2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

determinánsa $6\cdot 6 - 3\cdot 3 = 27 > 0$ és a főátló elemei pozitívak. Az élek tehát $x = y = 2$, $z = \frac{3}{2}$.

4. Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4+2^{n+1}}{3^{n-1}}$ sor összegét. (5 pont)

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4+2^{n+1}}{3^{n-1}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(12\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 12\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n \\
&= 12\frac{1}{1-\frac{1}{3}} + 6\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 36.
\end{aligned}$$