Matematika A2c gyakorlat

Vegyészmérnöki, Biomérnöki, Környezetmérnöki szakok, 2017/18 ősz

1. feladatsor: Vektorterek, lineáris kombináció, mátrixok, determináns (megoldás)

---

1. Valós vektorterek-e a következő halmazok? Ha igen, határozzuk meg a dimenziójukat, és véges dimenzió esetén adjuk meg egy bázisukat. Adjunk meg néhány alteret bennük.
   a) egész számok
   b) valós számok
   c) valós számpárok
   d) $P_n = \{\text{maximum } n\text{-edfokú polinomok}\}$
   e) a valós számegyenesen folytonos függvények

   Megoldás.
   a) Nem. Egy egész számot egy valós számmal megszorozva általában nem egész számot kapunk.
   b) Igen. Általánosabban: egy tetszőleges K test vektortér önmaga felett az összeadás és szorzás műveletekkel. Ennek a vektortérnek két altere van: $\{0\}$ és K.
   c) Igen. Általánosabban: ha K test, $n \in \mathbb{N}$, akkor K^n vektortér K felett a komponensenkénti műveletekkel. Még általánosabban: ha K test, X halmaz, akkor $K^X = \{f : X \to K\}$ (az $X \to K$ függvények halmaza) vektortér K felett az $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ módon definiált műveletekkel (pontonkénti műveletek). Példa altérre: ha $Y \subseteq X$, akkor $\left\{ f \in K^X \middle| \forall y \in Y : f(y) = 0 \right\}$ altér.
   d) Igen. Két polinom összege és egy polinom számszorosa is polinom, összegnél az eredmény fokszáma nem nagyobb mint a tagok fokszámának maximuma, számmal szorzásnál pedig nem változik. Példa altérre: a 0 pontban eltűnő polinomok, azon p polinomok, amelyekre $p(2) = 17p(5)$.
   e) Igen. $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ egy részhalmazát alkotják a folytonos függvények, két folytonos függvény összege is függvény, egy folytonos függvény számszorosa is folytonos, így a folytonos függvények alteret alkotnak. Néhány altér például: differenciálható függvények, azon folytonos függvények, amelyek 0 és 1 közötti integrálja 0, a polinomfüggvények, korlátos folytonos függvények.

2. Lássuk be, hogy $\mathbb{R}^2$-ben bázist alkot a $(2,3)$, $(1,2)$ vektorpár. Állítsuk elő e két vektor lineáris kombinációjaként a $(0,0)$ és $(9,4)$ vektorokat.

   Megoldás. A két vektor akkor alkot bázist, ha minden vektor pontosan egyféleképpen áll elő lineáris kombinációként. Próbáljuk meg az (x,y) vektort előállítani ilyen módon: az $\alpha(2,3) + \beta(1,2) = (x,y)$ egyenlet a komponensekre nézve a

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta &= x \\ 3\alpha + 2\beta &= y \end{aligned}$$

   egyenletrendszert jelenti, ahol x, y paraméterek. Az első egyenletből $\beta = x - 2\alpha$, ezt a második egyenletbe írva

$$3\alpha + 2(x - 2\alpha) = y$$

   adódik, tehát

$$2x - y = \alpha$$

és így $\beta = x - 2(2x - y) = y - 3x$. Látható, hogy minden paraméterérték mellett van megoldás és egyértelmű, tehát a megadott vektorok valóban bázist alkotnak.
Egyúttal képletet is találtunk a kifejtési együtthatók (azaz a koordináták) meghatározására, ebbe a megadott vektorokat beírva $\alpha = \beta = 0$ illetve $\alpha = 14$, $\beta = -23$ adódik. (Azt számolás nélkül is megállapíthatjuk, hogy $(0, 0)$ felírható $0 \cdot (2, 3) + 0 \cdot (1, 2)$ módon, a lineáris függetlenségből következik, hogy más megoldás nincsen.)

3. Írjuk fel a $(0, 0, 0)$ és $(0, 1, 0)$ vektorok koordinátáit a $(2, 1, 0)$, $(-1, -1, -1)$, $(-1, 1, 2)$ bázisban.

   Megoldás. A $(0, 0, 0)$ vektor a vektortér nulleleme, ennek koordinátái bármilyen bázisban $0, 0, 0$. A másik vektor koordinátáinak meghatározásához meg kell oldani az $\alpha \cdot (2, 1, 0) + \beta \cdot (-1, -1, -1) + \gamma \cdot (-1, 1, 2)$ egyenletet, amely komponensenként kiírva az

$$\begin{aligned} 2\alpha - \beta - \gamma &= 0 \\ \alpha - \beta + \gamma &= 1 \\ -\beta + 2\gamma &= 0 \end{aligned}$$

   egyenletrendszert jelenti. Az utolsó egyenletből $\beta = 2\gamma$, ezt az első kettő egyenletbe írva az

$$\begin{aligned} 2\alpha - 3\gamma &= 0 \\ \alpha - \gamma &= 1 \end{aligned}$$

   egyenletrendszerhez jutunk. A második egyenletből $\alpha = 1+\gamma$, ezt beírjuk az első egyenletbe:

$$2 - \gamma = 0,$$

   tehát $\gamma = 2$, $\alpha = 3$, $\beta = 4$.

4. Egy vektortérben $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárisan független vektorok. Lineárisan független-e az $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$, $(\mathbf{a} + 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c})$, $(\mathbf{a} + 4\mathbf{b} + 5\mathbf{c})$ rendszer?

   Megoldás. A lineáris függetlenség azt jelenti, hogy a megadott vektoroknak csak a triviális lineáris kombinációja 0. Írjuk fel az általános lineáris kombinációt, majd gyűjtsük össze $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ együtthatóit:

$$\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})+\beta(\mathbf{a}+2\mathbf{b}+3\mathbf{c})+\gamma(\mathbf{a}+4\mathbf{b}+5\mathbf{c}) = (\alpha+\beta+\gamma)\mathbf{a}+(\alpha+2\beta+4\gamma)\mathbf{b}+(\alpha+3\beta+5\gamma)\mathbf{c}$$

   A feltevés szerint $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ lineárisan függetlenek, tehát a fenti lineáris kombináció csak úgy lehet 0, ha az együtthatók mind eltűnnek, vagyis

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 0 \\ \alpha + 2\beta + 4\gamma &= 0 \\ \alpha + 3\beta + 5\gamma &= 0. \end{aligned}$$

   Vonjuk ki az első egyenletet a másik kettőből:

$$\begin{aligned} \beta + 3\gamma &= 0 \\ 2\beta + 4\gamma &= 0. \end{aligned}$$

   Most vonjuk ki az első kétszeresét a másodikból:

$$-2\gamma = 0,$$

   tehát $\gamma = 0$, amit az előző kettő valamelyikébe visszahelyettesítve $\beta = 0$ adódik, végül az eredeti egyenletek miatt $\alpha = 0$. Tehát a megadott vektoroknak is csak a triviális lineáris kombinációja adja a nullvektort, azaz lineárisan függetlenek.

5. Végezzük el az összes lehetséges szorzást A, B, C, A^T, B^T, C^T között.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

Megoldás.

$$AB = \begin{bmatrix} 17 & -10 & -18 & 5 \\ -15 & 8 & 27 & 3 \end{bmatrix}$$

$$AA^T = \begin{bmatrix} 14 & -7 \\ -7 & 14 \end{bmatrix}$$

$$BB^T = \begin{bmatrix} 30 & 19 & -5 \\ 19 & 30 & -26 \\ -5 & -26 & 65 \end{bmatrix}$$

$$BC^T = \begin{bmatrix} -4 & -18 \\ 15 & -21 \\ -31 & -33 \end{bmatrix}$$

$$CB^T = \begin{bmatrix} -4 & 15 & -31 \\ -18 & -21 & -33 \end{bmatrix}$$

$$CC^T = \begin{bmatrix} 30 & 36 \\ 36 & 174 \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -1 & 10 & -9 \\ -4 & -9 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A^TC = \begin{bmatrix} 9 & -10 & 17 & -20 \\ 8 & -12 & -2 & 4 \\ -17 & 22 & -15 & 16 \end{bmatrix}$$

$$B^TB = \begin{bmatrix} 30 & -6 & -33 & 12 \\ -6 & 20 & 18 & 12 \\ -33 & 18 & 54 & 3 \\ 12 & 12 & 3 & 21 \end{bmatrix}$$

$$B^TA^T = \begin{bmatrix} 17 & -15 \\ -10 & 8 \\ -18 & 27 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$C^TA = \begin{bmatrix} 9 & 8 & -17 \\ -10 & -12 & 22 \\ 17 & -2 & -15 \\ -20 & 4 & 16 \end{bmatrix}$$

$$C^TC = \begin{bmatrix} 26 & -32 & 32 & -36 \\ -32 & 40 & -36 & 40 \\ 32 & -36 & 58 & -68 \\ -36 & 40 & -68 & 80 \end{bmatrix}$$

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy XX^T és X^TX mindig elvégezhető és mindkét szorzat négyzetes mátrix. Azt is láthatjuk, hogy pl. $B^TA^T = (AB)^T$.

6. Számoljuk ki a következő mátrixok determinánsát:

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Megoldás.

a) Az oszlopokból emeljünk ki 3-at, majd a második oszlop 2/3-szorosát vonjuk le az elsőből:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 \end{vmatrix} = 3^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

b) Az első oszlopból emeljünk ki 2-t, az első sor kétszeresét vonjuk le a másodikból, a második sor háromszorosát vonjuk le az utolsó sorból, az utolsó sor kétszeresét vonjuk le a másodikból, cseréljük meg a második és harmadik sort, végül az utolsó sorból emeljünk ki -9-et.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= 2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 18\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 18$$

c) Az első oszlopot adjuk hozzá a másodikhoz, ötszörösét pedig a harmadikhoz, az első sorból emeljünk ki -1-et, cseréljük fel a második és az utolsó oszlopot, a második oszlop 22-szeresét illetve 8-szorosát vonjuk le a harmadik illetve negyedik oszlopból, a negyedik oszlop 5-szörösét vonjuk le a harmadikból, a harmadik oszlop kétszeresét adjuk hozzá a negyedikhez, végül az utolsó sor háromszorosát adjuk a harmadikhoz.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 22 & 1 \\ 1 & 11 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 23 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 22 & 1 \\ 1 & 11 & 6 & 3 \\ 4 & 5 & 23 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 22 & 8 \\ 1 & 3 & 6 & 11 \\ 4 & 0 & 23 & 5 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -60 & -13 \\ 4 & 0 & 23 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & -13 \\ 4 & 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & -3 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Megjegyzés. A determinánsokat sokféleképp meg lehet határozni sor- és oszlopműveletek segítségével. A fenti megoldások nem a legkevesebb műveletet használják, viszont elkerülik a törtekkel számolást (az első kivételével).

További gyakorló feladatok

7. Valós vektorterek-e a következő halmazok? Ha igen, határozzuk meg a dimenziójukat, és véges dimenzió esetén adjuk meg egy bázisukat. Adjunk meg néhány alteret bennük.
   a) a legalább n-edfokú polinomok
   b) az $\mathbb{R}$-en értelmezett páros függvények
   c) az $\mathbb{R}$-en értelmezett felülről korlátos függvények

   Megoldás.
   a) Nem. A számmal szorzás nem változtatja meg a fokszámot, viszont két legalább n-edfokú polinom összege lehet alacsonyabb fokú: pl. $(x^2 + 2x) + (-x^2 + 3x) = 5x$ két legalább másodfokú polinom, de az összegük foka 1.
   b) Igen. Az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy alterét alkotják a páros függvények, hiszen páros függvények összege, számszorosa is páros. Példa altérre: páros folytonos függvények, páros differenciálható függvények.
   c) Nem. Felülről korlátos függvények összege szintén felülről korlátos, viszont negatív számmal szorozva már előfordulhat, hogy az eredmény nem lesz felülről korlátos. Például ilyen az $f(x) = -x^2$ függvény, amelynek a 0 felső korlátja, viszont $-f$ nem korlátos felülről.

8. Állítsuk elő a $(2,3)$ és $(1,2)$ vektorok lineáris kombinációjaként a $(0,1)$ vektort.

   Megoldás. Az $\alpha(2,3) + \beta(1,2) = (0,1)$ egyenlet megoldásait keressük, egyenletrendszer alakban

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta &= 0 \\ 3\alpha + 2\beta &= 1. \end{aligned}$$

   Az első egyenletből $\beta = -2\alpha$, ezt a második egyenletbe írva $-\alpha = 1$, tehát $\alpha = -1$ és $\beta = 2$.

9. Írjuk fel a $(3,-1,7)$ vektor koordinátáit a $(2,1,0)$, $(-1,-1,-1)$, $(-1,1,2)$ bázisban.

   Megoldás. Az $\alpha(2,1,0)+\beta(-1,-1,-1)+\gamma(-1,1,2) = (3,-1,7)$ egyenletet kell megoldani, ami komponensenként kiírva az

$$\begin{aligned} 2\alpha - \beta - \gamma &= 3 \\ \alpha - \beta + \gamma &= -1 \\ -\beta + 2\gamma &= 7 \end{aligned}$$

   egyenletrendszert jelenti. Az utolsó egyenletből $\beta = 2\gamma - 7$, ezt az első kettőbe írva

$$\begin{aligned} 2\alpha - 3\gamma &= -4 \\ \alpha - \gamma &= -8 \end{aligned}$$

   adódik. Az utóbbi egyenletből $\gamma = \alpha + 8$, ezt az előbbibe írva a $\alpha = -20$, majd $\gamma = -12$, $\beta = -31$.

10. Számoljuk ki a következő mátrixok determinánsát:
    a) $\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$
    b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$

Megoldás.

a) Mivel a paramétertől függően lehetnek 0 elemek, sor- és oszlopműveletekkel több esetet külön kellene végigszámolni. A mátrix kis mérete miatt egyszerűbb most a permutációkkal való felírást használni:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

tehát

$$\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix} = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

b) Vonjuk le az első oszlop kétszeresét a második, háromszorosát a harmadik oszlopból. A kapott mátrix harmadik oszlopa a második oszlop kétszerese, tehát a determináns 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & -8 \\ 9 & -8 & -16 \end{vmatrix} = 0$$

11. Igaz-e, hogy $\mathbb{R}^n$-ben az $(1,0,\dots,0)$, $(1,1,0,\dots,0)$, $\dots$, $(1,1,\dots,1)$ vektorok bázist alkotnak? Írjuk fel az $(1,0,\dots,0)$, $(0,1,0,\dots,0)$, $\dots$, $(0,\dots,0,1)$ vektorok koordinátáit ebben a bázisban.

Megoldás. n darab vektorról van szó egy n dimenziós térben, tehát ha belátjuk, hogy generátorrendszer, akkor abból következik, hogy bázis. Ha f_i jelöli azt a vektort, amelynek első i darab komponense 1, a maradék $n-i$ darab pedig 0, akkor $f_1, f_2-f_1, f_3-f_2, \dots, f_i-f_{i-1}, \dots, f_n-f_{n-1}$ éppen a standard bázis elemei. Ezek generálják az $\mathbb{R}^n$ vektorteret, tehát a megadott vektorok is generátorrendszert alkotnak.
A standard bázis i. eleme $f_i - f_{i-1}$ ha $i > 1$, tehát a koordináták $(0,\dots,0,-1,1,0,\dots,0)$ illetve az első vektor koordinátái $(1,0,\dots,0)$.

12. Egy M négyzetes mátrix nyoma a főátlóban lévő elemek összege, jele $\operatorname{Tr} M$. Bizonyítsuk be, hogy ha A $(n\times m)$ típusú és B $(m\times n)$ típusú, akkor $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

Megoldás. Legyen $A = (a_{ij})_{n\times m}$ és $B = (b_{ij})_{m\times n}$. Ekkor AB főátlójának k. eleme

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ki}b_{ik},$$

és így

$$\operatorname{Tr}(AB) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ki}b_{ik}.$$

Hasonlóan BA főátlójának l. eleme

$$\sum_{j=1}^{n} b_{jl}a_{lj},$$

tehát

$$\operatorname{Tr}(BA) \sum_{l=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{jl}a_{lj}.$$

A két összeg csak a szummák felcserélésében és az összegzési indexek nevében különbözik egymástól.

13. Mennyi az

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$n \times n$ méretű mátrix determinánsa?

Megoldás. Vonjuk le az első oszlopot a harmadikból, majd a harmadikat az ötödikből, stb. Ha n páratlan, akkor ezen lépések után az utolsó oszlop 0, tehát ekkor $\det A_n = 0$.
Ha viszont $n = 2k$ páros, akkor most az első sort vonjuk le a harmadikból, majd a harmadikat az ötödikből, stb. A műveletek elvégzése után kapott mátrix

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ebből k darab sorcserével kaphatjuk meg az egységmátrixot, tehát $\det A_n = (-1)^k$.

14. Bizonyítsuk be, hogy ha A 2×2 méretű mátrix, akkor $A^2 - (\operatorname{Tr} A)A + (\det A)I = 0$, ahol I a 2×2 méretű egységmátrixot jelöli.

Megoldás. Legyen

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Ezzel

$$\begin{aligned} & A^2 - (\operatorname{Tr} A)A + (\det A)I \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} - (a_{11} + a_{22}) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{12}a_{21} & a_{11}a_{12} + a_{12}a_{22} \\ a_{21}a_{11} + a_{22}a_{21} & a_{21}a_{12} + a_{22}^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11}^2 + a_{22}a_{11} & a_{11}a_{12} + a_{22}a_{12} \\ a_{11}a_{21} + a_{22}a_{21} & a_{11}a_{22} + a_{22}^2 \end{bmatrix} + \\ &\qquad + \begin{bmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix} = 0. \end{aligned}$$