Matematika A2c gyakorlat

Vegyészmérnöki, Biomérnöki, Környezetmérnöki szakok, 2017/18 ősz

1. feladatsor: Vektorterek, lineáris kombináció, mátrixok, determináns

---

1. Valós vektorterek-e a következő halmazok? Ha igen, határozzuk meg a dimenziójukat, és véges dimenzió esetén adjuk meg egy bázisukat. Adjunk meg néhány alteret bennük.
   a) egész számok
   b) valós számok
   c) valós számpárok
   d) $P_n = \{\text{maximum } n\text{-edfokú polinomok}\}$
   e) a valós számegyenesen folytonos függvények
2. Lássuk be, hogy $\mathbb{R}^2$-ben bázist alkot a $(2,3)$, $(1,2)$ vektorpár. Állítsuk elő e két vektor lineáris kombinációjaként a $(0,0)$ és $(9,4)$ vektorokat.
3. Írjuk fel a $(0,0,0)$ és $(0,1,0)$ vektorok koordinátáit a $(2,1,0)$, $(-1,-1,-1)$, $(-1,1,2)$ bázisban.
4. Egy vektortérben $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ lineárisan független vektorok. Lineárisan független-e az $(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})$, $(\mathbf{a}+2\mathbf{b}+3\mathbf{c})$, $(\mathbf{a}+4\mathbf{b}+5\mathbf{c})$ rendszer?
5. Végezzük el az összes lehetséges szorzást A, B, C, A^T, B^T, C^T között.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 4 & 3 & 1 \\ 5 & 0 & -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & -6 & 7 & -8 \end{bmatrix}$$

6. Számoljuk ki a következő mátrixok determinánsát:
   a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
   b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 5 \\ 0 & 7 & 8 \end{bmatrix}$
   c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 10 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

További gyakorló feladatok

7. Valós vektorterek-e a következő halmazok? Ha igen, határozzuk meg a dimenziójukat, és véges dimenzió esetén adjuk meg egy bázisukat. Adjunk meg néhány alteret bennük.
   a) a legalább n-edfokú polinomok
   b) az $\mathbb{R}$-en értelmezett páros függvények
   c) az $\mathbb{R}$-en értelmezett felülről korlátos függvények
8. Állítsuk elő a $(2,3)$ és $(1,2)$ vektorok lineáris kombinációjaként a $(0,1)$ vektort.
9. Írjuk fel a $(3,-1,7)$ vektor koordinátáit a $(2,1,0)$, $(-1,-1,-1)$, $(-1,1,2)$ bázisban.

10. Számoljuk ki a következő mátrixok determinánsát:

   a) $\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$

   b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{bmatrix}$

11. Igaz-e, hogy $\mathbb{R}^n$-ben az $(1, 0, \dots, 0)$, $(1, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(1, 1, \dots, 1)$ vektorok bázist alkotnak? Írjuk fel az $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0)$, $\dots$, $(0, \dots, 0, 1)$ vektorok koordinátáit ebben a bázisban.

12. Egy M négyzetes mátrix nyoma a főátlóban lévő elemek összege, jele $\operatorname{Tr} M$. Bizonyítsuk be, hogy ha A $(n \times m)$ típusú és B $(m \times n)$ típusú, akkor $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.

13. Mennyi az

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   $n \times n$ méretű mátrix determinánsa?

14. Bizonyítsuk be, hogy ha A 2×2 méretű mátrix, akkor $A^2 - (\operatorname{Tr} A)A + (\det A)I = 0$, ahol I a 2×2 méretű egységmátrixot jelöli.