Matematika A2c gyakorlat

Vegyészmérnöki, Biomérnöki, Környezetmérnöki szakok, 2017/18 ősz

10. feladatsor: Többváltozós függvények szélsőértékei (megoldás)

---

1. Keressük meg a következő függvények lokális szélsőértékeit.
   a) $f(x,y) = (x-3y+3)^2 + (x-y-1)^2$
   b) $f(x,y) = (x-y+1)^2 - (x^2-2)^2$
   c) $f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2 - 4$
   d) $f(x,y) = \dfrac{20}{x} + \dfrac{50}{y} + xy$
   e) $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$

   Megoldás.

   a) A függvény differenciálható, tehát ott lehet lokális szélsőérték, ahol a gradiens 0. grad f komponensfüggvényei a parciális deriváltak:

$$f'_x(x,y) = 2(x-3y+3) + 2(x-y-1) = 4x - 8y + 4$$
$$f'_y(x,y) = 2(x-3y+3)\cdot(-3) + 2(x-y-1)\cdot(-1) = -8x + 20y - 16$$

   Az $4x-8y+4=0$, $-8x+20y-16=0$ egyenletrendszer megoldása $(x,y)=(3,2)$. A Hesse-mátrix:

$$\begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 20 \end{bmatrix}$$

   Ez pozitív definit, hiszen a bal felső eleme és a determinánsa is pozitív: $4\cdot 20 - (-8)^2 = 16 > 0$. Tehát ebben a pontban lokális minimum van, értéke $f(3,2) = 0$.

   b) grad f komponensei:

$$f'_x(x,y) = 2(x-y+1) - 2(x^2-2)\cdot 2x = -4x^3 + 10x - 2y + 2$$
$$f'_y(x,y) = 2(x-y+1)\cdot(-1) = -2x + 2y - 2$$

   A közös zérushelyek: $(0,1), (\pm\sqrt{2}, 1\pm\sqrt{2})$. A Hesse-mátrix

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10-12x^2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

   A jobb alsó elem mindig pozitív, tehát ahol a determináns pozitív, ott pozitív definit, ahol negatív, ott pedig indefinit a mátrix. $\det H(x,y) = (10-12x^2)\cdot 2 - (-2)^2 = 16 - 24x^2$. A zérushelyeknél

$$H(0,1) = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det H = 16 \qquad f(0,1) = -4$$
$$H(-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} -14 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det H = -32 \qquad f(-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}) = 0$$
$$H(\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}) = \begin{bmatrix} -14 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det H = -32 \qquad f(\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}) = 0,$$

   tehát a $(0,1)$ pontban lokális minimum van, $(\pm\sqrt{2}, 1\pm\sqrt{2})$ nyeregpont.

c) $\operatorname{grad} f$ komponensei:

$$f'_x(x,y) = 3x^2 - 6x + 2y$$
$$f'_y(x,y) = 2x + 2y$$

A parciális deriváltak közös zérushelyei $(0,0)$ és $(-8/3,-8/3)$. A Hesse-mátrix

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x-6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

A jobb alsó elem pozitív, tehát csak pozitív definit vagy indefinit lehet a determináns előjelétől függően. $\det H(x,y) = (6x-6)\cdot 2 - 2^2 = 12x - 16$. A zérushelyeknél

$$H(8/3,-8/3) = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det H = 16 \qquad f(8/3,-8/3) = -\frac{364}{27}$$
$$H(0,0) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det H = -16 \qquad f(0,0) = -4$$

tehát $(0,0)$ nyeregpont, $(8/3,-8/3)$ pedig lokális minimum.

d) A gradiens komponensei

$$f'_x(x,y) = -\frac{20}{x^2} + y$$
$$f'_y(x,y) = x - \frac{50}{y^2}$$

Akkor nulla mindkét komponens, ha $(x,y) = (2,5)$. A Hesse-mátrix

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40x^{-3} & 1 \\ 1 & 100y^{-3} \end{bmatrix}$$

tehát

$$H(2,5) = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & \frac{4}{5} \end{bmatrix},$$

ami pozitív definit, hiszen a főátló elemei pozitívak és a determináns is pozitív. Tehát a $(2,5)$ pontban lokális minimumhely van, $f(2,5) = 30$.

e) A gradiens komponensei:

$$f'_x(x,y) = 4y - 4x^3$$
$$f'_y(x,y) = 4x - 4y^3,$$

a közös zérushelyek $(0,0)$ és $(\pm 1,\pm 1)$. A Hesse-mátrix

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12x^2 & 4 \\ 4 & -12y^2 \end{bmatrix}.$$

A zéruhelyeknél

$$H(-1,-1) = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 \end{bmatrix} \qquad \det H = 128 \qquad f(-1,-1) = 2$$
$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det H = -16 \qquad f(0,0) = 0$$
$$H(1,1) = \begin{bmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -12 \end{bmatrix} \qquad \det H = 128 \qquad f(1,1) = 2,$$

tehát $(0,0)$ nyeregpont, $(\pm 1,\pm 1)$ lokális maximumhely.

2. Keressük meg az $\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$ halmazon az $f(x,y)=x^2+y^2+y-1$ függvény maximumát és minimumát.

   Megoldás. Szélsőérték lehet a halmaz belsejében, ahol a gradiens 0, vagy a peremen. A gradiens komponensei

   $$f'_x(x,y)=2x$$
   $$f'_y(x,y)=1+2y,$$

   A közös zérushely $(0,-1/2)$. A Hesse-mátrix itt

   $$H(0,-1/2)=\begin{bmatrix} f''_{xx}(0,-1/2) & f''_{xy}(0,-1/2) \\ f''_{yx}(0,-1/2) & f''_{yy}(0,-1/2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix},$$

   ami pozitív definit, tehát lokális minimum van ebben a pontban, értéke $-5/4$.
   A perem egy körvonal, a szokásos paraméterezése $(x(t),y(t))=(\cos t,\sin t)$. A függvényérték $f(x(t),y(t))=\sin t$, tehát lokális maximum van $t=\pi/2$-nél és lokális minimum $t=-\pi/2$-nél, az értékek ± 1. Tehát a minimum $-5/4$, a maximum 1 a megadott halmazon.

3. Legyen $f(x,y)=x^3y^5$. Keressük meg f lokális szélsőértékeit. Keressük meg f minimumát és maximumát a $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ csúcsok általá meghatározott háromszöglapon.

   Megoldás. A gradiens komponensei

   $$f'_x(x,y)=3x^2y^5$$
   $$f'_y(x,y)=5x^3y^4,$$

   a közös zérushelyek a koordinátatengelyek pontjai. Ezek egyike sem lokális szélsőérték, hiszen a koordinátatengelyeken áthaladáskor a függvény előjelet vált.
   A háromszöglapon tekintve szélsőérték lehet belül a gradiens zérushelyeinél vagy a peremen. Mivel a gradiens nem tűnik el a háromszög belsejében, csak a peremet kell vizsgálni. A $(0,0)$ csúcsba befutó két oldalon a függvényérték 0, hiszen ezeken az egyik koordináta 0. A harmadik oldalt paraméterezzük $(x(t),y(t))=(t,1-t)$ módon, ahol $t\in[0,1]$. $f(x(t),y(t))=(1-t)^5t^3$, a derivált zérushelyei $0,3/8,1$, ebből csak a $3/8$ ad új pontot. Itt a függvényérték $\frac{84375}{16777216}$, tehát ez a maximum, a minimum pedig 0.

4. Géza a pajtája falához egy $1\,\mathrm{m}^3$ térfogatú, felültől nyitott, téglatest alakú szénatárolót szeretne építeni. A tároló egyik oldalát a pajta fala alkotja, csak a maradék 3 oldalát és az alját kell elkészítenie. Hogyan méretezze a téglatestet, hogy a lehető legkevesebb anyagot kelljen felhasználnia? Oldjuk meg a feladatot úgy is, hogy a tároló alját a föld alkotja.

   Megoldás. Az első esetben legyen a és b az alap oldalai, b a pajtánál levő, c a magasság. Ekkor $V=abc$ és $A=ab+2ac+bc$, $c=\frac{V}{ab}$ helyettesítéssel $f(a,b)=ab+\frac{V}{a}+2\frac{V}{b}$ szélsőértékeit keressük $a>0$, $b>0$ mellett. A deriváltak

   $$f'_a(a,b)=b-\frac{V}{a^2}$$
   $$f'_b(a,b)=a-\frac{2V}{b^2}$$

   amiből a zérushely $a=\sqrt[3]{V/2}$ és $b=\sqrt[3]{4V}$, $c=\sqrt[3]{V/2}$. Ez biztosan minimum, mert a tartomány szélein ∞-hez tart a felszín.
   A második esetben ugyanilyen változókkal $V=abc$, de most $A=2ac+bc=\frac{V}{a}+\frac{2V}{b}$. Ennek nincs minimuma, ami deriválásból látszik, de onnan is, hogy pozitív és $A\to 0$ amint $a,b\to\infty$.

További gyakorló feladatok

5. Határozzuk meg az alábbi függvények lokális szélsőértékeit.

a) $f(x, y) = x^3 - 9x + y^2 - 6y$

b) $f(x, y) = 2x + y + \dfrac{4}{xy}$

c) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^3} + y^3 - \dfrac{3y}{x}$

d) $f(x, y) = y^3 - 12y + 2(x + y)^2 - 8(x + y)$

e) $f(x, y) = \dfrac{1}{xy} + 8y - x$

f) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy + 9y$

Megoldás.

a) $\operatorname{grad} f$ komponensfüggvényei

$$f'_x(x, y) = 3x^2 - 9$$
$$f'_y(x, y) = 2y - 6$$

A közös zérushelyek $(\pm\sqrt{3}, 3)$. A Hesse-mátrix

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

a zérushelyeknél

$$H(-\sqrt{3}, 3) = \begin{bmatrix} -6\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det H = -12\sqrt{3} \qquad f(-\sqrt{3}, 3) = -9 + 6\sqrt{3}$$
$$H(\sqrt{3}, 3) = \begin{bmatrix} 6\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det H = 12\sqrt{3} \qquad f(\sqrt{3}, 3) = -9 - 6\sqrt{3},$$

tehát $(-\sqrt{3}, 3)$ nyeregpont, $(\sqrt{3}, 3)$ lokális minimumhely.

b) Az elsőrendű parciális deriváltak

$$f'_x(x, y) = 2 - \frac{4}{x^2 y}$$
$$f'_y(x, y) = 1 - \frac{4}{xy^2},$$

a közös zérushely $(1, 2)$. A Hesse-mátrix

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{8}{x^3 y} & \frac{4}{x^2 y^2} \\ \frac{4}{x^2 y^2} & \frac{8}{xy^3} \end{bmatrix},$$

tehát

$$H(1, 2) = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ez pozitív definit, hiszen a determináns $3 > 0$ és az átló elemei pozitívak. Tehát itt a függvénynek lokális minimuma van, $f(1, 2) = 6$.

c) A gradiens komponensei

$$f'_x(x,y) = -\frac{3}{x^4} + \frac{3y}{x^2}$$
$$f'_y(x,y) = -\frac{3}{x} + 3y^2,$$

aminek a közös zérushelye $(1,1)$. A Hesse-mátrix

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{x^5} - \frac{6y}{x^3} & \frac{3}{x^2} \\ \frac{3}{x^2} & 6y \end{bmatrix},$$

tehát

$$H(1,1) = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Ez pozitív definit: $\det H(1,1) = 36 - 9 = 27 > 0$ és a főátlóban pozitív elemek állnak. Tehát itt lokális minimumhely van, $f(1,1) = -1$.

d) $\operatorname{grad} f$ komponensfüggvényei

$$f'_x(x,y) = 4x + 4y - 8$$
$$f'_y(x,y) = 4x + 3y^2 + 4y - 20,$$

a zérushelyek $(0,2)$ és $(4,-2)$. A Hesse-mátrix

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 6y+4 \end{bmatrix},$$

a zérushelyeknél

$$H(0,2) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 16 \end{bmatrix} \qquad \det H = 48 \qquad f(0,2) = -24$$
$$H(4,-2) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -8 \end{bmatrix} \qquad \det H = -48 \qquad f(4,-2) = 8,$$

tehát $(0,2)$ lokális minimumhely, $(4,-2)$ nyeregpont.

e) Az elsőrendű parciális deriváltak

$$f'_x(x,y) = -1 - \frac{1}{x^2y}$$
$$f'_y(x,y) = 8 - \frac{1}{xy^2},$$

ezek együtt csak a $(2,-1/4)$ pontban egyenlőek nullával. A Hesse-mátrix

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{x^3y} & \frac{1}{x^2y^2} \\ \frac{1}{x^2y^2} & \frac{2}{xy^3} \end{bmatrix},$$

tehát

$$H(2,-1/4) = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -64 \end{bmatrix}.$$

Ez negatív definit, mivel a determináns $\det H(2,-1/4) = 64 - 16 = 48 > 0$ és a főátló elemei negatívak. Tehát a $(2,-1/4)$ pontban lokális maximum van, $f(2,-1/4) = -6$.

f) A gradiens komponensei

$$f'_x(x,y) = 2x + 4y$$
$$f'_y(x,y) = 4x + 2y + 9,$$

a közös zérushely $(-3, 3/2)$. A Hesse-mátrix

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix},$$

ami indefinit, mivel $\det H(x,y) = 2^2 - 4^2 = -12 < 0$. Tehát az f függvénynek nyeregpontja van a $(-3, 3/2)$ pontban.

6. Határozzuk meg a $z = 4 - x^2 - y^2$ egyenletű felület $z \geq 0$ része és az xy sík által határolt térrészbe írható maximális térfogatú téglatest oldalait, ha a téglatest lapjai a koordinátasíkokkal párhuzamosak.

Megoldás. A maximális térfogat megvalósul $[-x,x] \times [-y,y] \times [0,z]$ alakú téglatestként, ugyanis ha $[a,b] \times [c,d] \times [e,f]$ része a megadott térrésznek, akkor $x = \max\{|a|,|b|\}$, $y = \max\{|c|,|d|\}$, $z = \max\{|e|,|f|\}$ választással $[-x,x] \times [-y,y] \times [0,z]$ is része. A térfogat nő, ha állandó x, y mellett z-t növeljük, ennek maximuma $4 - x^2 - y^2$, tehát $V(x,y) = 4xy(4 - x^2 - y^2)$ maximumát keressük $x^2 + y^2 \leq 4$ feltétel mellett. A megszokott módon elemezve:

$$V'_x(x,y) = 16y - 12x^2y - 4y^3$$
$$V'_y(x,y) = 16x - 4x^3 - 12xy^2$$

A zérushelyek közül elég azokat tekinteni, amelyekre $x, y \geq 0$ és $x^2 + y^2 < 4$, ezek $(0,0), (1,1)$. A Hesse-mátrix

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24xy & 16 - 12x^2 - 12y^2 \\ 16 - 12x^2 - 12y^2 & -24xy \end{bmatrix}.$$

A zérushelyeknél

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 16 \\ 16 & 0 \end{bmatrix} \qquad \det H = -256 \qquad V(0,0) = 0$$
$$H(1,1) = \begin{bmatrix} -24 & -8 \\ -8 & -24 \end{bmatrix} \qquad \det H = 512 \qquad V(1,1) = 8$$

Az előbbi nyeregpont, az utóbbi pedig lokális maximum. A peremen a függvény azonosan 0, tehát a maximum $V(1,1) = 8$.

7. Egy téglatest egy pontban összefutó éleinek összege 60 cm. Mekkorák az élek, ha a téglatest térfogata maximális?

Megoldás. Legyenek az élek $x, y, 60 - x - y$, ekkor $V(x,y) = xy(60 - x - y)$ maximumát keressük $x, y \geq 0$, $x + y \leq 60$ feltétel mellett. Lokális szélsőértékek:

$$V'_x(x,y) = 60y - 2xy - y^2$$
$$V'_y(x,y) = 60x - x^2 - 2xy$$

A zérushelyek közül elegendő azokat vizsgálni, amire $x > 0, y > 0, x + y < 60$. Ilyen csak egy van, a $(20,20)$ pont. A Hesse-mátrix

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2y & 60 - 2x - 2y \\ 60 - 2x - 2y & -2x \end{bmatrix},$$

tehát

$$H(20,20) = \begin{bmatrix} -40 & -20 \\ -20 & -40 \end{bmatrix},$$

ami negatív definit, hiszen $\det H(20,20) = (-40)^2 - (-20)^2 = 1200 > 0$ és a főátló elemei negatívak. Eszerint itt lokális maximum van, az értéke 8000. A peremen legalább egy tényező 0, tehát a függvényérték is 0. Tehát a maximális térfogatú téglatest minden éle 20 cm hosszú (azaz a tégletest kocka).