Matematika A2c gyakorlat

Vegyészmérnöki, Biomérnöki, Környezetmérnöki szakok, 2017/18 ősz

11. feladatsor: Többváltozós függvények integrálása (megoldás)

1. Számoljuk ki:

   a) $\int_A xy \,\mathrm{d}T$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$

   b) $\int_A x \sin xy \,\mathrm{d}T$, $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 1 \le x \le 3, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$

   c) $\int_A x \,\mathrm{d}T$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 \le y \le x + 2\}$

   Megoldás.

   a) $\int_0^1 \int_0^1 xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{1}{2} y \,\mathrm{d}y = \frac{1}{4}$

   b) $\int_1^3 \int_0^{\pi/2} x \sin(xy) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_1^3 \left(1 - \cos\frac{\pi x}{2}\right) \mathrm{d}x = 2 + \frac{4}{\pi}$

   c) $x^2 = x + 2$ gyökei $x = -1$ és $x = 2$, az integrál
   $$\int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 x(2 + x - x^2) \,\mathrm{d}x = \frac{9}{4}$$

2. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét, és számoljuk ki az alábbi integrálokat.

   a) $\int_0^1 \int_{y^2}^1 y \sin x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

   b) $\int_0^1 \int_{2y}^2 4 \cos(x^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

   Megoldás.

   a) A tartomány $\{(x, y) | y \in [0, 1], y^2 \le x \le 1\} = \{(x, y) | x \in [0, 1], 0 \le y \le \sqrt{x}\}$, tehát
   $$\int_0^1 \int_{y^2}^1 y \sin x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} y \sin(x^2) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{2} \sin(x^2) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} - \frac{\cos 1}{4}$$

   b) $\{(x, y) | y \in [0, 1], 2y \le x \le 2\} = \{(x, y) | x \in [0, 2], 0 \le y \le x/2\}$, tehát
   $$\int_0^1 \int_{2y}^2 4 \cos(x^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_0^{x/2} 4 \cos(x^2) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^2 2x \cos(x^2) \,\mathrm{d}x = \sin 4$$

3. Számoljuk ki:

   a) $\int_A \frac{1}{1 + x^2} \,\mathrm{d}T$, A a $(0, 0)$, $(1, 1)$ és $(1, 0)$ csúcsú háromszög

   b) $\int_A \frac{x}{\sqrt{1 + y^2}} \,\mathrm{d}T$, $A = \{(x, y) | x \ge 0, x^2 \le y \le 4\}$

   Megoldás.

   a) $\int_0^1 \int_0^x \frac{1}{1 + x^2} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x}{1 + x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{2}$

   b) $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{y}} \frac{x}{\sqrt{1 + y^2}} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^4 \frac{y}{2\sqrt{1 + y^2}} \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{17})$

4. Számítsuk ki az $\iiint_V xy^2 z^3 \,\mathrm{d}V$ integrál érékét, ha az első térnyolcadba eső V korlátos térrész határai a $z = xy$ egyenletű felület, valamint a $z = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = x$ egyenletű síkok.

   Megoldás. A térfogat az 1 függvény integrálja a megadott tartományon, ami az $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$, $0 \le z \le xy$ egyenlőtlenségekkel meghatározott alakzat. Fubini tétele alapján a térfogat
   $$\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} xy^2 z^3 \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^x \frac{x^5 y^6}{4} \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x^{12}}{28} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{364}$$

További gyakorló feladatok

5. Számoljuk ki:

   a) $\displaystyle\int_A \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}T,\ A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| \tfrac{1}{x} \le y \le x, 0 \le x \le 2\right\}$

   b) $\displaystyle\int_A y\sin x^2\,\mathrm{d}T,\ A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 0 \le y \le \sqrt{x}, 0 \le x \le 1\}$

   Megoldás.

   a) $\displaystyle\int_0^2 \int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x(x^2-1)\,\mathrm{d}x = 2$

   b) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} y\sin(x^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{2}x\sin(x^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} - \frac{\cos 1}{4}$

6. Cseréljük fel az integrálás sorrendjét, és számoljuk ki az alábbi integrálokat.

   a) $\displaystyle\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

   b) $\displaystyle\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

   Megoldás.

   a) $\{(x,y) | y\in[0,2], y/2 \le x \le 1\} = \{(x,y) | x\in[0,1], 0 \le y \le 2x\}$, tehát

   $$\int_0^2 \int_{y/2}^1 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 2xe^{x^2}\,\mathrm{d}x = e - 1$$

   b) $\{(x,y) | x\in[0,8], \sqrt[3]{x} \le y \le 2\} = \{(x,y) | y\in[0,2], 0 \le x \le y^3\}$, tehát

   $$\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \int_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{y^3}{y^4+1}\,\mathrm{d}y = \frac{\ln 17}{4}$$

7. Számoljuk ki:

   a) $\displaystyle\int_A xy\,\mathrm{d}T$, A az $y=0$, $y=6-x$ és $y=\sqrt{x}$ görbékkel határolt korlátos alakzat

   b) $\displaystyle\int_A \left(\sin^2 x - y^2\right)\mathrm{d}T,\ A = \{(x,y) | y^2 \le \sin^2 x, 0 \le x \le \pi\}$

   Megoldás.

   a) $y^2 = 6-y$ pozitív megoldása $y=2$, tehát az integrál

   $$\int_0^2 \int_{y^2}^{6-y} xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \left(18y - 6y^2 + \frac{y^3}{2} - \frac{y^5}{2}\right)\mathrm{d}y = \frac{50}{3}$$

   b) $\displaystyle\int_0^\pi \int_{-\sin x}^{\sin x} \sin^2(x) - y^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \frac{4\sin^3 x}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{16}{9}$

8. Számítsuk ki a megadott felületekkel határolt korlátos térrész térfogatát!

   a) $y=0, y=2, z=0, z=2-2x^2$

   b) $x^2 = y+z,\ y=0,\ z=0,\ x=2$

   Megoldás.

   a) $2-2x^2=0$ megoldása $x=\pm 1$, tehát a térrész azon (x,y,z) pontokból áll, amelyekre $0\le y\le 2$, $-1\le x\le 1$, $0\le z\le 2-2x^2$ teljesül. A térfogat

   $$\int_0^2 \int_{-1}^1 \int_0^{2-2x^2} 1\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \int_{-1}^1 (2-2x^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 \frac{8}{3}\,\mathrm{d}y = \frac{16}{3}$$

   b) Az integrálási tartomány a $0\le x\le 2$, $0\le z\le x^2$, $0\le y\le x^2-z$ egyenlőtlenségek által meghatározott alakzat. A térfogat

   $$\int_0^2 \int_0^{x^2} \int_0^{x^2-z} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \int_0^{x^2} (x^2-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{x^4}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{16}{5}$$

9. Számítsuk ki az $0 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n \le 1$ alakzat n dimenziós térfogatát.

Megoldás.

$$I_n = \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \cdots \int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-1}} 1 \,\mathrm{d}x_n \ldots \mathrm{d}x_2 \,\mathrm{d}x_1$$

$t_i = \frac{x_i}{1-x_1}$ helyettesítéssel $(i = 2, 3, \ldots, n)$ $\mathrm{d}x_i = (1 - x_1)\,\mathrm{d}t_i$:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 (1-x_1)^{n-1} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{1-t_2} \cdots \int_0^{1-t_2-\cdots-t_{n-1}} 1 \,\mathrm{d}t_n \ldots \mathrm{d}t_2 \,\mathrm{d}x_1 \\ &= \int_0^1 (1-x_1)^{n-1} I_{n-1} \,\mathrm{d}x_1 \\ &= \frac{1}{n} I_{n-1} = \frac{1}{n!} \end{aligned}$$

mivel $I_1 = \int_0^1 1 \,\mathrm{d}x = 1$.

Megjegyzés. A feladatot integráltranszformációval is meg lehet oldani: a $[0,1]^n$ alakzatot $n!$ darabra felbonthatjuk aszerint, hogy a koordinátákat milyen permutáció rendezi sorba. Mivel két koordináta felcserélése egy olyan koordinátatranszformáció, aminek a Jacobi-determinánsa -1, az egyes darabok térfogata megegyezik. Mivel az összegük 1, egy darab térfogata $\frac{1}{n!}$.