Matematika A2c gyakorlat

Vegyészmérnöki, Biomérnöki, Környezetmérnöki szakok, 2017/18 ősz

12. feladatsor: Integráltranszformáció (megoldás)

---

1. Számoljuk ki az alábbi integrálokat.

   a) $\iint_A y^2 \,\mathrm{d}T$, ahol $A = \{(x,y) | x^2 + y^2 \le 4, 0 \le y \le x\}$

   b) $\iint_A x^2 y \,\mathrm{d}T$, ahol $A = \{(x,y) | 1 \le x^2 + y^2 \le 4, x \ge 0, y \ge 0\}$

   c) $\iint_A 7xy^4 \,\mathrm{d}T$, ahol $A = \left\{(x,y) \middle| 4 \le x^2 + y^2 \le 9, x \ge 0, y \ge \sqrt{3}x\right\}$

   Megoldás.

   a) A tartomány origó középpontú körcikk, tehát célszerű polárkoordinátákra áttérni:

   $$\begin{aligned} x(r,\varphi) &= r\cos\varphi \\ y(r,\varphi) &= r\sin\varphi, \end{aligned}$$

   az új integrálási tartomány $[0,2] \times [0,\pi/4]$. Tehát az integrál

   $$\begin{aligned} \iint_A y^2 \,\mathrm{d}T &= \int_0^{\pi/4} \int_0^2 r^2 \sin^2 \alpha r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\alpha \\ &= \int_0^2 r^3 \,\mathrm{d}r \int_0^{\pi/4} \sin^2\alpha \,\mathrm{d}\alpha = 4 \cdot \frac{1}{8}(\pi - 2) = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

   b) Ismét polárkoordinátákat használunk, most $r \in [1,2]$ és $\varphi \in [0,\pi/2]$, tehát

   $$\begin{aligned} \iint_T x^2 y \,\mathrm{d}T &= \int_0^{\pi/2} \int_1^2 r^2 \cos^2 \alpha r \sin \alpha r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\alpha \\ &= \int_1^2 r^4 \,\mathrm{d}r \int_0^{\pi/2} \cos^2\alpha \sin\alpha \,\mathrm{d}\alpha = \frac{31}{15} \end{aligned}$$

   c) Polárkoordinátákban $r \in [2,3]$, $\varphi \in [\pi/3, \pi/2]$ tartományon integrálunk:

   $$\begin{aligned} \iint_T 7xy^4 \,\mathrm{d}T &= \int_{\pi/3}^{\pi/2} \int_2^3 7r\cos\alpha r^4 \sin^4 \alpha r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\alpha \\ &= \int_2^3 7r^6 \,\mathrm{d}r \int_{\pi/3}^{\pi/2} \cos\alpha \sin^4\alpha \,\mathrm{d}\alpha \\ &= \frac{2059}{160}(9\sqrt{3} - 32) \end{aligned}$$

2. Számoljuk ki az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű henger és a $z = 0$, valamint a $z = 2 - x - y$ egyenletű síkok által határolt térrész térfogatát.

   Megoldás. Hengerkoordinátákat érdemes használni, az áttérés után az $r \in [0,1]$, $\phi \in [0,2\pi]$ és $0 \le z \le 2 - r\cos\phi - r\sin\phi$ feltételekkel megadott normáltartomány lesz az integrálási tartomány. A térfogat a konstans 1 függvény integrálja, de a Jacobi-determináns r, tehát a keresett térfogat

   $$\begin{aligned} \iiint_A (2 - x - y) \,\mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2 - r\cos\phi - r\sin\phi} r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (2 - r\cos\phi - r\sin\phi) r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\alpha \\ &= 2\pi \int_0^1 2r \,\mathrm{d}r = 2\pi \end{aligned}$$

3. A V korlátos térrész határai a $z = \sqrt{x^2+y^2}$, illetve a $z = 1$ egyenletű felületek. Számítsuk ki az

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}V$$

integrál értékét.

Megoldás. Az első felület egy olyan végtelen körkúp, aminek a tengelye a z tengely pozitív fele, és az alkotói a z tengellyek $\pi/4$ szöget zárnak be. A második felület egy sík, ami merőleges a z tengelyre. A kettő közötti alakzat egy kúp, az integrált hengerkoordinátákra áttérve számolhatjuk a legegyszerűbben. Az új integrálási tartományt megadó feltételek $r \in [0,1]$, $\phi \in [0,2\pi]$, $r \le z \le 1$. Az integrandust $\sqrt{x^2+y^2} = r$ figyelembevételével átalakítjuk, ezzel az integrál

$$\iiint_V \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_r^1 r\cdot r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 (r^2-r^3)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \frac{\pi}{6}$$

4. Számítsuk ki az $\iiint_V xyz\,\mathrm{d}V$ integrál értékét, ahol a V korlátos térrész az $x^2+y^2+z^2 \le 1$ gömb belsejének az $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$ térnyolcadba eső része.

Megoldás. Használjuk gömbi koordinátákat, azaz

$$\begin{aligned} x(r,\vartheta,\varphi) &= r\sin\vartheta\cos\varphi \\ y(r,\vartheta,\varphi) &= r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z(r,\vartheta,\varphi) &= r\cos\vartheta, \end{aligned}$$

A Jacobi-determináns $r^2\sin\vartheta$. A V térrésznek megfelelő paraméterértékek $r \in [0,1]$, $\vartheta \in [0,\pi/2]$, $\varphi \in [0,\pi/2]$. Tehát az integrál

$$\begin{aligned} \iiint_V xyz\,\mathrm{d}V &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\int_0^1 r^3\cos^2\vartheta\sin\vartheta\cos\phi\sin\phi r^2\cos\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\phi \\ &= \int_0^{\pi/2}\cos\phi\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\int_0^{\pi/2}\cos^3\vartheta\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\int_0^1 r^5\,\mathrm{d}r \\ &= \left[\frac{\sin^2\phi}{2}\right]_0^{\pi/2}\left[-\frac{\cos^4\vartheta}{4}\right]_0^{\pi/2}\left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{48} \end{aligned}$$

További gyakorló feladatok

5. Számítsuk ki az $\iint_T \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}T$ integrál értékét, ha T az $4 \le x^2+y^2 \le 25$, $x \le 0$, $y \ge 0$ egyenlőtlenségekkel adott tartomány.

Megoldás. Polárkoordinátákat használunk, az új változókra nézve $r \in [2,5]$ és $\varphi \in [\pi/2,\pi]$ a feltétel. $\sqrt{x^2+y^2} = r$ felhasználásával

$$\iint_T \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}T = \int_{\pi/2}^{\pi}\int_2^5 \frac{r\cos\varphi r\sin\varphi}{r} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\alpha = \int_2^5 r^2\,\mathrm{d}r\int_{\pi/2}^{\pi}\cos\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{39}{2}$$

6. Számítsuk ki az

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$

integrál értékét. (Útmutatás: írjuk fel az integrál négyzetét, alakítsuk kétváltozós integrállá és térjünk át polárkoordinátákra.)

Megoldás.

$$\begin{aligned}
I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
&= 2\pi\left[-\frac{e^{-r^2}}{2}\right]_0^{\infty} = \pi
\end{aligned}$$

alapján $I = \sqrt{\pi}$.

7. Számoljuk ki a $z = \sqrt{x^2+y^2}$ és a $z = 6 - x^2 - y^2$ egyenletű felületek által határolt korlátos térrész térfogatát.

   Megoldás. Mindkét felület szimmetrikus a z tengely körüli forgatásokra nézve, emiatt érdemes hengerkoordinátákra áttérni. $x = r\cos\phi$, $y = r\sin\phi$ helyettesítéssel a felületek egyenletei $z = r$ és $z = 6 - r^2$. A metszésvonal az egyenletrendszer pozitív megoldása, tehát $z = r = 2$. A tartományt emiatt a $0 \le r \le 2$, $r \le z \le 6 - r^2$ egyenlőtlenségekkel jellemezhetjük. A térfogat az 1 integrálja, tehát

$$\iiint_V \mathrm{d}V = \int_0^{2\pi}\int_0^2\int_r^{6-r^2-r} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (6-r^2-r)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi = \frac{32\pi}{3}$$

8. Számoljuk ki az $x^2+y^2+z^2 \le 1$ és a $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2}$ egyenlőtlenségekkel adott térrész térfogatát.

   Megoldás. Az első egyenlőtlenség egy origó középpontú gömböt határoz meg, a másik kettő pedig egy-egy olyan körkúp belsejét illetve külsejét, amelyek csúcsa az origó és tengelye a z tengely. Gömbi koordinátákban mindegyik feltétel egyszerűen kifejezhető: $r \in [0,1]$, $\vartheta \in [\pi/4, \pi/6]$. A térfogatot az 1 függvény integrálásával kapjuk:

$$\begin{aligned}
\iiint_V 1\,\mathrm{d}V &= \int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_0^1 r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}\phi \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi \int_{\pi/6}^{\pi/4}\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta \int_0^1 r^2\,\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\left[-\cos\vartheta\right]_{\pi/6}^{\pi/4}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 \\
&= 2\pi\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{1}{3} = \frac{\pi}{3}(\sqrt{3}-\sqrt{2})
\end{aligned}$$