Matematika A2c gyakorlat

Vegyészmérnöki, Biomérnöki, Környezetmérnöki szakok, 2017/18 ősz

13. feladatsor: Hatványsorok (megoldás)

---

1. Határozzuk meg a következő sorok konvergenciatartományát.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}(x-1)^n$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!}(x+7)^n$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n(n+3)}{n^2+3} x^n$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+4)^n}{n^2 \cdot 3^n}(x+3)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{3n}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{9^n}(x-2)^{2n}$

Megoldás.

a) A konvergenciaintervallum középpontja 1. A Cauchy–Hadamard-tétel alapján meghatározhatjuk a konvergenciasugarat:

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}\right|} = \frac{1}{2} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2},$$

tehát $r = 2$. Ebből annyit tudtunk meg, hogy a konvergenciatartomány tartalmazza a $(-1, 3)$ intervallumot és része a $[-1, 3]$ intervallumnak. A két végpontot külön meg kell vizsgálni. Az $x = -1$ pontban a sor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}(-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

ami divergens. Az $x = 3$ pontban viszont

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

ami Leibniz típusú, tehát konvergens. A konvergenciatartomány ennek alapján $(-1, 3]$.

b) A hatványsor -7 körüli, a konvergenciasugár

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|(-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!}\right|} = 0$$

alapján végtelen. A konvergenciatartomány $\mathbb{R}$.

c) A megadott sor 0 középpontú hatványsor, a konvergenciasugár

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(-2)^n(n+3)}{n^2+3}\right|}$$

alapján $\frac{1}{2}$. A konvergenciaintervallum végpontjait külön meg kell vizsgálni. Az $x = -\frac{1}{2}$ pontban a minoránskritériumot használhatjuk,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n(n+3)}{n^2+3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2+3} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4n^2} = \infty$$

alapján a sor divergens. Az $x = \frac{1}{2}$ pontban viszont a sor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n(n+3)}{n^2+3} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+3}{n^2+3},$$

ami Leibniz típusú, tehát konvergens. A konvergenciatartomány $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

d) Ez a sor nem hatványsor, de a gyökkritérium segítségével meghatározhatjuk a konvergenciatartományt. A sor konvergens, ha

$$1 > \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(2x+4)^n}{n^2 \cdot 3^n} (x+3)^n \right|} = \frac{|(2x+4)(x+3)|}{3},$$

azaz

$$0 < 2x^2 + 10x + 15 \text{ és } 2x^2 + 10x + 9 < 0.$$

Az első egyenlőtlenség minden valós számra teljesül, a második pedig akkor, ha $x \in (\frac{1}{2}(-5-\sqrt{7}), \frac{1}{2}(-5+\sqrt{7}))$. A végpontokon külön kell vizsgálni a sort. Mindkét esetben $(2x+4)(x+3) = 3$, tehát a sor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

ami konvergens. A konvergenciatartomány így $[\frac{1}{2}(-5-\sqrt{7}), \frac{1}{2}(-5+\sqrt{7})]$.

e) A sor egy 0 középpontú hatványsor. Csak a hárommal osztható kitevőjű tagok különböznek nullától, tehát elég ezen a részsorozaton tekinteni a Cauchy–Hadamard-tételben szereplő limesz szuperiort. A konvergenciasugár

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[3n]{\left| \frac{n}{2^n} \right|} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

alapján $\sqrt[3]{2}$. A végpontokban a sor

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \text{ illetve } \sum_{n=1}^{\infty} n,$$

mindkettő divergens. A konvergenciatartomány $(-\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2})$.

f) A sor egy 2 középpontú hatványsor. Csak a páros kitevőjű tagok különböznek nullától, tehát elég ezen a részsorozaton tekinteni a limesz szuperiort. A konvergenciasugár

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\left| \frac{n+1}{9^n} \right|} = \frac{1}{3}$$

alapján 3. A végpontokban

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) = \infty,$$

tehát a konvergenciatartomány $(-1, 5)$.

2. Határozzuk meg a következő sorok konvergenciasugarát.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}} x^n$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} x^n$

Megoldás.

a) A Cauchy–Hadamard-tétel alapján

$$\frac{1}{r} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+2)^n}{(n+6)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{6}{n}\right)^n} = e^{-4},$$

tehát a konvergenciasugár e^4.

b) A hányadoskritériumot alkalmazhatjuk, ennek alapján a konvergenciasugár

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(n+1)^n}{n!}}{\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)!}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}}\right| = \frac{1}{e}.$$

3. Adjuk meg az alábbi függvények x_0 bázispontú Taylor-sorfejtését és annak konvergenciatartományát.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$, $x_0 = 0$ és $x_0 = 5$

b) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$, $x_0 = 2$ és $x_0 = -5$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$ és $g(x) = \dfrac{x^5}{x^2+3}$, $x_0 = 0$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x+7}$ és $g(x) = \dfrac{3x^4}{x+7}$, $x_0 = 0$

Megoldás.

a) A mértani sor összegképlete alapján

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-3} &= -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x}{3}}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{3^n}x^n,\end{aligned}$$

a sor konvergenciatartománya $(-3,3)$. Hasonlóan

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-3} &= \frac{1}{(x-5)+2}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1-(\frac{x-5}{-2})}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)\frac{(-1)^n}{2^n}(x-5)^n,\end{aligned}$$

a konvergenciatartomány $(3,7)$.

b) A 0 körüli Taylor-sor

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+2} &= \frac{1}{(x-2)+4}\\ &= \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{x-2}{-4}}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}\frac{(-1)^n}{4^n}(x-2)^n,\end{aligned}$$

a konvergenciatartománya $(-2, 6)$. A $x_0 = -5$ középpontú Taylor-sor

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+2} &= \frac{1}{(x+5)-3} \\ &= -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{x+5}{3}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)\frac{1}{3^n}(x+5)^n,\end{aligned}$$

a konvergenciatartomány $(-8, -2)$.

c)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2+3} &= \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{-x^2}{3}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\frac{1}{3^n}(-x^2)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}x^{2n},\end{aligned}$$

a konvergenciatartomány $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$. A $g(x) = x^5 f(x)$ függvény Taylor-sorát tagonkénti szorzással kapjuk:

$$\frac{x^5}{x^2+3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^{n+1}}x^{2n+5},$$

a konvergenciatartomány $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

d)

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+7} &= \frac{1}{7}\frac{1}{1-\frac{-x}{7}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{7^{n+1}}x^n,\end{aligned}$$

a konvergenciatartomány $(-7, 7)$. A $g(x) = 3x^4 f(x)$ függvény Taylor-sorát tagonkénti szorzással kapjuk:

$$\frac{3x^4}{x+7} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n \cdot 3}{7^{n+1}}x^{n+4},$$

a konvergenciatartomány $(7, 7)$.

Megjegyzés. Általánosan is felírhatjuk az $f(x) = (x-a)^{-1}$ függvény x_0 körüli Taylor-sorát a következő módon:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x-a} &= \frac{1}{(x-x_0)-(a-x_0)} \\ &= -\frac{1}{a-x_0}\frac{1}{1-\frac{x-x_0}{a-x_0}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{(a-x_0)^{n+1}}(x-x_0)^n,\end{aligned}$$

a sor konvergenciatartománya $(x_0 - |a-x_0|, x_0 + |a-x_0|)$.

4. Írjuk fel az alábbi függvények x_0 pontbeli Taylor-sorát és annak konvergenciatartományát.
   a) $f_1(x) = \sin 3x^2$, $x_0 = 0$
   b) $f_2(x) = e^{4x}$, $x_0 = 0$ és $x_0 = 3$
   c) $f_3(x) = \sinh 2x^4$, $x_0 = 0$
   d) $f_4(x) = e^{-2x} \cosh 5x$, $x_0 = 0$

   Megoldás.
   a) A $\sin x$ függvény 0 körüli Taylor-sorába helyettesítsük a $3x^2$ kifejezést:

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(3x^2)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(3)^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{4n+2}.$$

   Mivel a $\sin x$ Taylor-sora mindenhol konvergens, a kapott sor konvergenciatartománya is $\mathbb{R}$

   b) Az exponenciális függvény 0 körüli hatványsorából indulunk ki:

$$f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} x^n,$$

   a konvergenciatartomány $\mathbb{R}$. Az $x_0 = 3$ körüli hatványsor hasonlóan számolható:

$$f_2(x) = e^{12} e^{4(x-3)} = e^{12} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4(x-3))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{12} \frac{4^n}{n!} (x-3)^n,$$

   a konvergenciatartomány $\mathbb{R}$.

   Megjegyzés. Általánosabban:

$$e^{ax} = e^{ab} e^{a(x-b)} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{ab} \frac{a^n}{n!} (x-b)^n$$

   konvergenciatartománya $\mathbb{R}$.

   c) A $\sinh x$ függvény 0 középpontú Taylor-sorából indulhatunk ki, ami mindenhol konvergens, tehát

$$f_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2x^4)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{8n+4}$$

   konvergenciatartománya is $\mathbb{R}$.

   d) f_4 két exponenciális függvény összegeként írható fel, a külön számolt Taylor-sorokat összeadhatjuk:

$$f_4(x) = \frac{1}{2} e^{3x} + \frac{1}{2} e^{-7x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + (-7)^n}{2 \cdot n!} x^n$$

   A sor konvergenciatartománya $\mathbb{R}$.

5. Írjuk fel az $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorfejtését, és határozzuk meg a konvergenciasugarat. Az f függvény sorfejtésére támaszkodva írjuk fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú sorfejtését, és adjuk meg ezek konvergenciasugarát is.
   a) $g(x) = \ln(x+3)$
   b) $h(x) = \dfrac{1}{(x+3)^3}$

Megoldás. A mértani sor összegképlete alapján

$$f(x) = \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{-x}{3}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} x^k$$

ha $|x| < 3$, tehát a konvergenciasugár 3

a) $g'(x) = f(x)$ és $g(0) = \ln 3$, tehát a hatványsort tagonként integrálva

$$g(x) = (\ln 3) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)3^{k+1}} x^{k+1}$$

adódik. A konvergenciasugár megegyezik az eredeti soréval, azaz 3.

b) $\frac{1}{2}f''(x) = h(x)$, tehát a hatványsort tagonként deriválva

$$h(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k k(k-1)}{3^{k+1}} x^{k-2},$$

az így kapott sor konvergenciasugara is 3.

6. Tudjuk, hogy $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$, a sor konvergenciasugara 1.

a) Írjuk fel az $f(x) = \ln\left(1 + \frac{x^2}{3}\right)$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát, és adjuk meg a konvergenciasugarat.

b) Az f függvény sorfejtését felhasználva adjuk meg az

$$\int_0^1 \ln\left(1 + \frac{x^2}{3}\right) \mathrm{d}x$$

integrál értékét az f függvény negyedfokú Taylor-polinomjának felhasználásával, és becsüljük meg a hibát.

Megoldás.

a) $\ln(1+x)$ megadott Taylor-sorába x helyére a $x^2/3$ kifejezést írjuk, ekkor a következő hatványsor adódik:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n3^n} x^{2n}.$$

Ez akkor konvergens, ha $x^2/3 \le 1$, tehát a konvergenciasugár $\sqrt{3}$.

b) A $[0,1]$ intervallumon

$$\ln\left(1 + \frac{x^2}{3}\right) = \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{18} + R_0^{(4)}(x,\xi)$$

ahol $0 \le \xi \le 1$ és a maradéktag felülről becsülhető

$$R_0^{(4)}(x,\xi) = \frac{48(45\xi - 30\xi^3 + \xi^5)}{(3+\xi^2)^5}\frac{x^5}{5!} \le 48\frac{45 + 26\sqrt{3}}{1728 \cdot 5!} = \frac{45 + 26\sqrt{3}}{4320} = 0{,}020841\ldots$$

módon, mivel

$$\frac{48(45\xi - 30\xi^3 + \xi^5)}{(3+\xi^2)^5}$$

deriváltjának egy zérushelye van $[0,1]$-ben, ez $\xi = 2\sqrt{3}-3$ és itt maximum van. Emellett itt $R_0^{(4)}(x,\xi) \geq 0$, tehát

$$\int_0^1 \ln\left(1+\frac{x^2}{3}\right) \mathrm{d}x \geq \int_0^1 \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{18}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{10}$$

és

$$\int_0^1 \ln\left(1+\frac{x^2}{3}\right) \mathrm{d}x \leq \int_0^1 \left(\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{18} + \frac{45+26\sqrt{3}}{4320}\right) \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{10} + \frac{45+26\sqrt{3}}{4320} = 0{,}120841\ldots$$

A pontos érték: $-2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}} + \ln\frac{4}{3} = 0{,}10148143\ldots$.

7. Írjuk fel az $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ és $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát és a sorok konvergenciasugarát. Határozzuk meg az x^4 együtthatóit.

   Megoldás. A binomiális sor alapján

$$\frac{1}{\sqrt{4-x}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{-1}{4}x\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\binom{-1/2}{n}\frac{(-1)^n}{4^n}x^n,$$

   a sor konvergenciasugara 4. x helyére x^2-et írva

$$\frac{1}{\sqrt{4-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\binom{-1/2}{n}\frac{(-1)^n}{4^n}x^{2n}$$

   adódik, ennek konvergenciasugara 2. Az keresett együtthatók

$$\frac{1}{2}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\left(-\frac{7}{2}\right)}{4!}\frac{1}{4^4} = \frac{35}{65536}$$

   és

$$\frac{1}{2}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}\frac{1}{4^2} = \frac{3}{256}.$$

8. Legyen $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{32-2x^2}}$ és $x_0 = 0$.
   a) Írjuk fel az f függvény x_0 bázispontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát.
   b) Mennyi x^8 együtthatója?
   c) Határozzuk meg $f^{(26)}(0)$ és $f^{(25)}(0)$ értékét.

   Megoldás.
   a) A binomiális sor felhasználásával

$$\frac{1}{\sqrt[5]{32-2x^2}} = \frac{1}{2}\left(1+\left(-\frac{x^2}{16}\right)\right)^{-1/5} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/5}{n}\left(-\frac{x^2}{16}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}\binom{n-1+1/5}{n}\frac{1}{16^n}x^{2n}.$$

   A konvergencia feltétele $|-x^2/16| < 1$, tehát a konvergenciasugár 4.
   b) x^8 együtthatója

$$\frac{1}{2}\binom{16/5}{4}\frac{1}{16^4} = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{16}{5}\right)\left(\frac{11}{5}\right)\left(\frac{6}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)}{4!}\frac{1}{16^4} = \frac{11}{20480000}.$$

c) $f^{(n)}(0)/n!$ megegyezik x^n együtthatójával, tehát

$$f^{(26)}(0) = 26!\frac{1}{2}\binom{61/5}{13}\frac{1}{16^{13}} = \frac{6529189649667738343380009}{524288000000000}$$

és

$$f^{(25)}(0) = 0.$$

További gyakorló feladatok

9. Állapítsuk meg az alábbi számsorok összegét. (Útmutatás: írjuk fel az e^x és a $\sin x$ függvények 0 középű Taylor sorát.)

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}$

Megoldás.

a)

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e^1 = e.$$

b)

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$

tehát

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = \sin 1.$$

c) Az exponenciális függvény Taylor-sorát felhasználva

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!} = e^4.$$

d) Az exponenciális függvény Taylor-sora alapján

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

10. Adjuk meg az $f(x) = 5x^3e^{-3x^2}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorfejtését és annak konvergenciatartományát. Számítsuk ki $f^{(100)}(0)$ és $f^{(101)}(0)$ értékét.

Megoldás. Az exponenciális függvény 0 körüli Taylor-sorából indulunk ki:

$$5x^3e^{-3x^2} = 5x^3n = 0^\infty \frac{(-3x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5(-3)^n}{n!} x^{2n+3},$$

a sor mindenhol konvergens, mivel e^x Taylor-sora is minden x értékre konvergál. A deriváltakat a Taylor-sor együtthatóiból számolhatjuk:

$$f^{(100)}(0) = 0$$

és

$$f^{(101)}(0) = -\frac{5 \cdot 3^{49}}{49!} 101.$$

11. Tekintsük a $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hatványsort, és számoljuk ki az összegét.
   a) Írjunk x helyébe $-t$-t, majd az így keletkező hatványsort integráljuk 0-tól y-ig. Milyen összefüggést kapunk?
   b) Bizonyítsuk be, hogy $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = \ln 2$.
   c) Hasonlóan, csak x helyébe $-t^2$-et írva, lássuk be, hogy $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots = \frac{\pi}{4}$.

Megoldás. A megadott sor összege a mértani sor összegképlete alapján

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

ha $x \in (-1, 1)$.

a) $y \in (-1, 1)$ esetén az integrálás tagonként elvégezhető:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^y (-t)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^y \sum_{n=0}^{\infty} (-t)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^y \frac{1}{1+t} \,\mathrm{d}t = \log(1+y),$$

tehát a $\log(1+y)$ függvény 0 körüli Taylor-sorát határoztuk meg.

b) A

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{n+1}}{n+1}$$

sor konvergens az $y = 1$ pontban, mivel Leibniz típusú. Ekkor éppen a kérdéses sort kapjuk, az összeg tehát $\ln 2$.

c) $x = -t^2$ helyettesítés után integrálunk:

$$\int_0^y \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^y t^{2n} \,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{2n+1}$$

és

$$\int_0^y \sum_{n=0}^{\infty} (-t^2)^n \,\mathrm{d}t = \int_0^y \frac{1}{1+t^2} \,\mathrm{d}t = \arctan y.$$

A két kifejezés egyenlőségéből $y = 1$ helyettesítéssel adódik az állítás, az így kapott sor Leibniz típusú, tehát konvergens.

12. Írjuk fel a $g(x) = \dfrac{2x^3}{\sqrt[5]{32 - 2x^2}}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát. Számítsuk ki $g^{(102)}(0)$ és $g^{(103)}(0)$ értékét.

Megoldás. A binomiális sor felhasználásával

$$\frac{2x^3}{\sqrt[5]{32 - 2x^2}} = x^3 \left(1 + \left(-\frac{x^2}{16}\right)\right)^{-1/5} = x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/5}{n} \left(-\frac{x^2}{16}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n - 1 + 1/5}{n} \frac{1}{16^n} x^{2n+3}.$$

A konvergencia feltétele $|-x^2/16| < 1$, tehát a konvergenciasugár 4.
$g^{(n)}(0)/n!$ megegyezik x^n együtthatójával, tehát

$$g^{(102)}(0) = 0$$

és

$$g^{(103)}(0) = 103! \binom{246/5}{50} \frac{1}{16^{50}}.$$

13. Adjuk meg az $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 + x^4}} \,\mathrm{d}x$ integrál értékét az integrandus 0 középpontú nyolcadik Taylor-polinomjának felhasználásával, és becsüljük meg a hibát.

Megoldás.

$$(1 + x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots$$

alapján a nyolcadik Taylor-polinom

$$T_8(x) = 1 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{8}x^8.$$

A maradéktagot felírhatjuk az integrandus 9. deriváltjának segítségével is, de az sok számolással jár. Ehelyett használjuk $(1 + x)^{-1/2}$ maradéktagját.

$$\left((1 + x)^{-1/2}\right)''' = -\frac{15}{8}(1 + x)^{-7/2},$$

tehát

$$(1 + x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{3!}\frac{15}{8}(1 + \xi)^{-7/2}x^3$$

valamely $\xi \in [0, x]$ értékre. A maradéktag abszolútértéke ξ függvényében monoton csökken, emiatt felülről becsülhető az $\frac{5}{16}x^3$ értékkel, tehát x helyére a x^4 kifejezést helyettesítve

$$\left| \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 + x^4}} \,\mathrm{d}x - \int_0^{1/2} T_8(x) \,\mathrm{d}x \right| \le \int_0^{1/2} \frac{5}{16} x^{12} \,\mathrm{d}x = \frac{5}{16} \frac{2^{-13}}{13} = \frac{5}{1703936} \le 3 \cdot 10^{-6}$$

A Taylor-polinom integrálja

$$\int_0^{1/2} T_8(x) \,\mathrm{d}x = \left[x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{24}x^9\right]_0^{1/2} = \frac{30533}{61440} = 0{,}496956\ldots.$$

14. Írjuk fel az $f(x) = \sqrt[4]{1 + 2x^3}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát. Számítsuk ki $f^{(9)}(0)$ és $f^{(10)}(0)$ értékét.

Megoldás. A binimiális sor alapján

$$f(x) = (1+2x^3)^{1/4} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/4}{n} (2x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/4}{n} 2^n x^{3n},$$

ez akkor konvergens, ha $|2x^3| < 1$, tehát a konvergenciasugár $1/\sqrt[3]{2}$. $f^{(n)}(0)/n!$ az x^n együtthatója, ennek alapján

$$f^{(9)}(0) = 9! \binom{1/4}{3} 2^3 = 158760$$

és

$$f^{(10)}(0) = 0.$$