Matematika A2c gyakorlat

Vegyészmérnöki, Biomérnöki, Környezetmérnöki szakok, 2017/18 ősz

13. feladatsor: Hatványsorok

1. Határozzuk meg a következő sorok konvergenciatartományát.
   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}(x-1)^n$
   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!}(x+7)^n$
   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n(n+3)}{n^2+3}x^n$
   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+4)^n}{n^2 \cdot 3^n}(x+3)^n$
   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}x^{3n}$
   f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{9^n}(x-2)^{2n}$
2. Határozzuk meg a következő sorok konvergenciasugarát.
   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}}x^n$
   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!}x^n$
3. Adjuk meg az alábbi függvények x_0 bázispontú Taylor-sorfejtését és annak konvergenciatartományát.
   a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$, $x_0 = 0$ és $x_0 = 5$
   b) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$, $x_0 = 2$ és $x_0 = -5$
   c) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3}$ és $g(x) = \dfrac{x^5}{x^2+3}$, $x_0 = 0$
   d) $f(x) = \dfrac{1}{x+7}$ és $g(x) = \dfrac{3x^4}{x+7}$, $x_0 = 0$
4. Írjuk fel az alábbi függvények x_0 pontbeli Taylor-sorát és annak konvergenciatartományát.
   a) $f_1(x) = \sin 3x^2$, $x_0 = 0$
   b) $f_2(x) = e^{4x}$, $x_0 = 0$ és $x_0 = 3$
   c) $f_3(x) = \sinh 2x^4$, $x_0 = 0$
   d) $f_4(x) = e^{-2x}\cosh 5x$, $x_0 = 0$
5. Írjuk fel az $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorfejtését, és határozzuk meg a konvergenciasugarat. Az f függvény sorfejtésére támaszkodva írjuk fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú sorfejtését, és adjuk meg ezek konvergenciasugarát is.
   a) $g(x) = \ln(x+3)$
   b) $h(x) = \dfrac{1}{(x+3)^3}$
6. Tudjuk, hogy $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dots$, a sor konvergenciasugara 1.
   a) Írjuk fel az $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x^2}{3}\right)$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát, és adjuk meg

a konvergenciasugarat.

b) Az f függvény sorfejtését felhasználva adjuk meg az

$$\int_0^1 \ln\left(1+\frac{x^2}{3}\right) \mathrm{d}x$$

integrál értékét az f függvény negyedfokú Taylor-polinomjának felhasználásával, és becsüljük meg a hibát.

7. Írjuk fel az $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}}$ és $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát és a sorok konvergenciasugarát. Határozzuk meg az x^4 együtthatóit.

8. Legyen $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{32-2x^2}}$ és $x_0 = 0$.
   a) Írjuk fel az f függvény x_0 bázispontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát.
   b) Mennyi x^8 együtthatója?
   c) Határozzuk meg $f^{(26)}(0)$ és $f^{(25)}(0)$ értékét.

További gyakorló feladatok

9. Állapítsuk meg az alábbi számsorok összegét. (Útmutatás: írjuk fel az e^x és a $\sin x$ függvények 0 közepű Taylor sorát.)
   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$
   b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$
   c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$
   d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!}$

10. Adjuk meg az $f(x) = 5x^3 e^{-3x^2}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorfejtését és annak konvergenciatartományát. Számítsuk ki $f^{(100)}(0)$ és $f^{(101)}(0)$ értékét.

11. Tekintsük a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hatványsort, és számoljuk ki az összegét.
    a) Írjunk x helyébe $-t$-t, majd az így keletkező hatványsort integráljuk 0-tól y-ig. Milyen összefüggést kapunk?
    b) Bizonyítsuk be, hogy $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = \ln 2$.
    c) Hasonlóan, csak x helyébe $-t^2$-et írva, lássuk be, hogy $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \ldots = \frac{\pi}{4}$.

12. Írjuk fel a $g(x) = \dfrac{2x^3}{\sqrt[5]{32-2x^2}}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát. Számítsuk ki $g^{(102)}(0)$ és $g^{(103)}(0)$ értékét.

13. Adjuk meg az $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \mathrm{d}x$ integrál értékét az integrandus 0 középpontú nyolcadik Taylor-polinomjának felhasználásával, és becsüljük meg a hibát.

14. Írjuk fel az $f(x) = \sqrt[4]{1+2x^3}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát és a sor konvergenciasugarát. Számítsuk ki $f^{(9)}(0)$ és $f^{(10)}(0)$ értékét.