Matematika A2c gyakorlat

Vegyészmérnöki, Biomérnöki, Környezetmérnöki szakok, 2017/18 ősz

14. feladatsor: Fourier-sorok (megoldás)

---

1. Legyen $f(x) = 0$ ha $x \in (-\pi, 0]$, és $f(x) = 2$ ha $x \in (0, \pi]$. Írjuk fel f Fourier-sorát. Mely pontokban állítja elő f Fourier-sora a függvényt?

   Megoldás. A Fourier-sor

   $$a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

   ahol

   $$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 2\,\mathrm{d}x = 1,$$

   $$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} = 0$$

   és

   $$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} (1 - (-1)^n).$$

   Mivel $f(x)$ szakaszonként folytonos, a folytonossági pontokban előállítja a Fourier-sora. A 0 és π pontokban a függvény nem folytonos, ott a jobb- és baloldali határérték számtani közepéhez, azaz 1-hez konvergál a Fourier-sor. Ezekben a pontokban az összegfüggvény nem egyenlő f értékével.

2. Legyen $f : (0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$, és terjesszük ki ezt a függvényt periodikusan $\mathbb{R}$-re. Írjuk fel f Fourier-sorát. Mely pontokban állítja elő a Fourier-sor a függvényt? A sorfejtést felhasználva számoljuk ki $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ értékét.

   Megoldás. A Fourier-sor

   $$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

   ahol

   $$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \frac{(2\pi)^2}{2} = \pi,$$

   $$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\left[x \frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{n}\,\mathrm{d}x \right) \\ &= -\frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx \,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{2\pi}\right) = -\frac{2}{n}.
\end{aligned}$$

A függvény Fourier-sora tehát

$$\pi - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin nx.$$

Mivel $f(x)$ szakaszonként folytonos, a folytonossági pontokban előállítja a Fourier-sora. A 0 pontban a függvény nem folytonos, ott a jobb- és baloldali határérték számtani közepéhez, azaz π-hez konvergál a Fourier-sor.
Mivel

$$\sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & \text{ha } n \text{ páros} \\ (-1)^k & \text{ha } n = 2k+1,\ k\in\mathbb{Z}, \end{cases}$$

A Fourier-sor $x = \pi/2$ helyen felvett értékével kifejezhetjük a keresett sorösszeget. Itt f folytonos, tehát

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin n\frac{\pi}{2} = \frac{\pi - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} = \frac{\pi-\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

3. Legyen $f(x) = 0$ ha $x\in(-\pi,0]$, és $f(x) = x/2$ ha $x\in(0,\pi]$. Írjuk fel f Fourier-sorát. Mely pontokban állítja elő f Fourier-sora a függvényt?

   Megoldás. Az együtthatók

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi}{8},$$

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[\frac{x}{2}\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\frac{\sin nx}{n}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{2}\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{n^2}((-1)^n - 1)
\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{x}{2}\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{x}{2}\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\left[-\frac{x}{2}\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{1}{2}\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{n}(-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

A függvény Fourier-sora tehát

$$\frac{\pi}{8}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx+\frac{1}{2}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx\right).$$

f a π pontban nem folytonos, itt a bal- és jobboldali határértékek számtani közepéhez konvegál a Fourier-sor, ami nem egyezik meg a függvényértékkel. Mindenhol máshol folytonos, tehát ott előállítja a Fourier-sora.

4. Jelöljük f-fel az abszolútérték-függvény periodikus kiterjesztését a $[-\pi,\pi)$ intervallumról a számegyenesre. Írjuk fel a Fourier-sorát.

   Megoldás. Az együtthatók

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}2\int_0^{\pi}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}2\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}2\int_0^{\pi}x\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{\pi}\left(\left[x\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin nx}{n}\,\mathrm{d}x\right)\\&=-\frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}=\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}((-1)^n-1)\end{aligned}$$

   és $b_n=0$, mivel f páros függvény. A függvény Fourier-sora tehát

$$\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n-1}{n^2}\cos nx=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{4}{\pi}\right)\frac{1}{(2k+1)^2}\cos(2k+1)x.$$

További gyakorló feladatok

5. Írjuk fel a következő függvények Fourier-együtthatóit:
   a) $f(x)=3$
   b) $f(x)=\sin x$
   c) $f(x)=\cos 4x$ (mint 2π szerint periodikus függvény)
   d) $f(x)=x$ ha $x\in(-\pi,\pi]$, 2π szerint periodikusan kiterjesztve

   Megoldás.
   a)

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}3\,\mathrm{d}x=3,$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}3\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2\pi}\left[\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{2\pi}=0$$

   és $b_n=0$, mivel f páros. Tehát a Fourier-sor $f(x)=3$.

   b) A megadott függvény páratlan, tehát $a_n=0$ minden $n\in\mathbb{N}$ mellett.

$$\begin{aligned}b_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\sin x\sin nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\left(\cos(x-nx)-\cos(x+nx)\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(n-1)x}{n-1}+\frac{\sin(n+1)x}{n+1}\right]_0^{2\pi}=0\end{aligned}$$

ha $n \geq 2$,

$$b_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Tehát a Fourier-sor $f(x) = \sin x$.

c) A függvény páros, tehát $b_n = 0$,

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos 4x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin 4x}{4}\right]_0^{2\pi} = 0$$

és

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos 4x \cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(\cos(nx+4x)+\cos(nx-4x)\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(n+4)x}{n+4} + \frac{\sin(n-4)x}{n-4}\right]_0^{2\pi} = 0
\end{aligned}$$

ha $n \neq 4$,

$$a_4 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 8x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\left[x + \frac{\sin 8x}{8}\right]_0^{2\pi} = 1.$$

A Fourier-sor $f(x) = \cos 4x$.

d) A függvény páratlan, tehát $a_n = 0$.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} - \left[-\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}\right) = 2(-1)^{n+1}\frac{1}{n},
\end{aligned}$$

tehát a Fourier-sor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

6. Az $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ $(x \in (-\pi, \pi])$ függvény Fourier-sora segítségével határozzuk meg a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)}{2k+1}$$

sor összegét.

Megoldás. A függvény páratlan, tehát $a_n = 0$,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n},$$

tehát a Fourier-sor

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{1-(-1)^n}{n} \sin nx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1)x.$$

f folytonos az $x = 1$ pontban, tehát a Fourier-sora itt előálítja:

$$1 = f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi} \frac{1}{2k+1} \sin(2k+1),$$

tehát

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

7. Az $f(x) = x$ $(x \in (-\pi, \pi])$ függvény Fourier-sora segítségével határozzuk meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$$

sor összegét.

Megoldás. A függvény páratlan, tehát $a_n = 0$,

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} x \sin nx \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[-x \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \left(-\frac{\cos nx}{n} \right) \mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[-x \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} - \left[-\frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} \right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

f folytonos az $x = 1 - \pi$ pontban, tehát a Fourier-sora ott előállítja:

$$\begin{aligned} 1 - \pi &= f(1-\pi) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(n - n\pi) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} (-1)^n \sin n \\ &= -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}, \end{aligned}$$

tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

8. Az $f(x) = x^2$ és $g(x) = x^4$ $(x \in (-\pi, \pi])$ függvények Fourier-sorai segítségével határozzuk meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ és } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

sorok összegeit.

Megoldás. Mindkét függvény páros és folytonos, így a Fourier-soraik tisztán koszinusz sorok és minden pontban előállítják a függvényeket. f Fourier-együtthatói

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{3}$$

és

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[x^2\frac{\sin nx}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x\frac{\sin nx}{n}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left[x^2\frac{\sin nx}{n} + 2x\frac{\cos nx}{n^2} - 2\frac{\sin nx}{n^3}\right]_0^\pi = (-1)^n\frac{4}{n^2},
\end{aligned}$$

tehát

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx$$

ha $x \in [-\pi, \pi]$. Hasonlóan g Fourier-együtthatói

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^\pi = \frac{\pi^4}{5}$$

és

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^4\cos nx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[x^4\frac{\sin nx}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 4x^3\frac{\sin nx}{n}\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left[x^4\frac{\sin nx}{n} + 4x^3\frac{\cos nx}{n^2} - 12x^2\frac{\sin nx}{n^3} - 24x\frac{\cos nx}{n^4} + 24\frac{\sin nx}{n^5}\right]_0^\pi \\
&= 8\pi^2\frac{(-1)^n}{n^2} - 48\frac{(-1)^n}{n^4},
\end{aligned}$$

tehát

$$x^4 = \frac{\pi^4}{5} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(8\pi^2\frac{1}{n^2} - 48\frac{1}{n^4}\right)\cos nx$$

ha $x \in [-\pi, \pi]$.
Mindkét sort értékeljük ki az $x = \pi$ pontban, ekkor $\cos nx = \cos n\pi = (-1)^n$, tehát

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

és

$$\pi^4 = \frac{\pi^4}{5} + 8\pi^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - 48\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4},$$

amiből

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ és } \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{9}.$$