Matematika A2c gyakorlat

Vegyészmérnöki, Biomérnöki, Környezetmérnöki szakok, 2017/18 ősz

2. feladatsor: Rang, inverz, lineáris egyenletrendszerek (megoldás)

---

1. Számítsuk ki a megadott mátrixok rangját, valamint az A, B mátrixok inverzét, ha létezik.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$$
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -1 \\ 2 & 0 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

Megoldás.

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -9 \end{bmatrix} = 2.$$

$$\operatorname{rk} B = \operatorname{rk} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} = \operatorname{rk} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 3.$$

$$\operatorname{rk} C = \operatorname{rk} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 7 \end{bmatrix} = 2$$

Az A mátrix inverzét legkönnyebben az aldeterminánsok segítségével írhatjuk fel:

$$A^{-1} = \frac{1}{1 \cdot 5 - 2 \cdot 7} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -7 & 1 \end{bmatrix}$$

B^{-1} kiszámításához használjunk Gauss–Jordan-eliminációt:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$
$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right].$$

2. Legyen $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \end{bmatrix}^T$ és $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}^T$. Oldjuk meg az előző feladatbeli A és B mátrixokkal az $A\mathbf{x} = \mathbf{a}$ és $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrendszereket Gauss-eliminációval illetve inverz mátrix módszerével.

Megoldás. Az első egyenletrendszer kibővített mátrixának második sorából levonjuk az első 7-szeresét:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 7 & 5 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -9 & 18 \end{array}\right]$$

A második sor alapján $x_2 = -2$, ezt az első sorba helyettesítve $x_1 = -2 - 2x_2 = 2$.
A második egyenletrendszert megoldása

$$\mathbf{x} = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

3. Hány független vektor választható ki az alábbiak közül? Mennyi az általuk generált altér dimenziója?

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Megoldás. A vektorok közül kiválasztható lineárisan független vektorok maximális száma egyenlő a generált altér dimenziójával és annak a mátrixnak a rangjával is, amelynek oszlopai a megadott vektorok. A rangot meghatározhatjuk Gauss-eliminációval:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 7 \\ 6 & 3 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -14 \end{bmatrix}.$$

A kapott mátrix felső háromszög alakú, az átlóban nullától különböző elemek állnak, tehát a rang 3.

4. Oldjuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrenszert Gauss-eliminációval. Mennyi A rangja?

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 5 \\ 7 & 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Megoldás.

a)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & -12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -6 \end{array}\right].$$

A kapott egyenletrendszer utolsó egyenlete $0 = -6$, tehát nincs megoldás. Az együtthatómátrix lépcsős alakjában két nemnulla sor van, tehát $\operatorname{rk} A = 2$.

b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \\ 7 & 7 & 8 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & -11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Az utolsó egyenlet $0 = 1$, tehát nincs megoldás. $\operatorname{rk} A = 2$.

5. Hogyan kell az α, β paramétereket megválasztani ahhoz, hogy az

$$\begin{aligned} -y + 2z &= 3 \\ x + 3y &= \beta \\ -2x + \alpha y + z &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszernek

a) ne legyen megoldása;

b) végtelen sok megoldása legyen?

Megoldás. Végezzünk Gauss-eliminációt a kibővített mátrixon:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & \beta \\ -2 & \alpha & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & \beta \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ -2 & \alpha & 1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ -2 & \alpha & 1 & 0 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 6+\alpha & 1 & 2\beta \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & \beta \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 13+2\alpha & 18+3\alpha+2\beta \end{array}\right]$$

Az együtthatómátrix rangja 2 ha $\alpha = -\frac{13}{2}$, egyébként 3. A kibővített mátrix rangja $\alpha = -\frac{13}{2}$, $\beta = \frac{3}{4}$ esetén 2, egyébként 3.

a) Akkor nincs megoldás, ha a kibővített mátrix rangja nagyobb mint az együtthatómátrixé, tehát ha $\alpha = -\frac{13}{2}$ és $\beta \neq \frac{3}{4}$.

b) Akkor van végtelen sok megoldás, ha az együtthatómátrix rangja megegyezik a kibővített mátrix rangjával, és ez kisebb az ismeretlenek számánál, tehát ha $\alpha = -\frac{13}{2}$ és $\beta = \frac{3}{4}$.

További gyakorló feladatok

6. Számítsuk ki a megadott mátrixok rangját, valamint az A mátrix inverzét, ha létezik.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 & 8 \\ 3 & 4 & 3 & 4 \\ 9 & 8 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Sorműveletekkel hozzuk lépcsős alakra a mátrixokat:

$$\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

Mivel a rang kisebb mint a mátrix mérete, nem létezik inverz.

$$\operatorname{rk} B = \operatorname{rk}\begin{bmatrix}1 & 2 & 9 & 8\\ 0 & -2 & -24 & -20\\ 0 & -10 & -80 & -70\end{bmatrix} = \operatorname{rk}\begin{bmatrix}1 & 2 & 9 & 8\\ 0 & -2 & -24 & -20\\ 0 & 0 & 40 & 30\end{bmatrix} = 3.$$

7. Hány független vektor választható ki az alábbiak közül? Mennyi az általuk generált altér dimenziója?

$$\begin{bmatrix}1\\2\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-1\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\-3\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\5\\2\\1\end{bmatrix}$$

Megoldás. Az oszlopokat rendezzük egy 4×4 méretű mátrixba, ennek a rangját kell meghatározni. Ehhez hozzuk lépcsős alakra Gauss-eliminációval:

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -3 & 5\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -5 & -5 & 5\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ 0 & -1 & -1 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

A rang megegyezik a nemnulla sorok számával, vagyis 3.

8. Oldjuk meg az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletrenszert Gauss-eliminációval. Mennyi A rangja?

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 6 & 7\\ 9 & 10 & 11\\ 13 & 14 & 15\end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix}4\\8\\12\\16\end{bmatrix}$$

Megoldás. Végezzünk Gauss-eliminációt a kibővített mátrixon:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15 & 16\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & -4 & -8 & -12\\ 0 & -8 & -16 & -24\\ 0 & -12 & -24 & -36\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\end{array}\right]$$

$\operatorname{rk} A = 2$ és ennyi a kibővített mátrix rangja is, tehát létezik megoldás. Mivel az ismeretlenek száma 3, van egy szabad paraméter: x_3 tetszőlegesen megválasztható, visszahelyettesítve $x_2 = 3 - 2x_3$, $x_1 = -2 + x_3$.

9. Legyen

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 5\\ -3 & 2 & 1\\ \alpha & 2 & 1\end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix}0\\8\\\beta\end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}.$$

Hogyan válasszuk meg az α és β paraméterek értékét úgy, hogy az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ egyenletnek egyértelmű megoldása legyen; végtelen sok megoldása legyen; ne legyen megoldása?

Megoldás. Végezzünk Gauss-eliminációt a kibővített mátrixon:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 5 & 0\\ -3 & 2 & 1 & 8\\ \alpha & 2 & 1 & \beta\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 5 & 0\\ 0 & 8 & 16 & 8\\ 0 & 2-2\alpha & 1-5\alpha & \beta\end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 2-2\alpha & 1-5\alpha & \beta\end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c}1 & 2 & 5 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -3-\alpha & -2+2\alpha+\beta\end{array}\right]$$

Az együtthatómátrix rangja 2, ha $\alpha = -3$, egyébként 3. A kibővített mátrix rangja 2, ha $\alpha = -3$ és $\beta = 8$, egyébként 3.

a) Akkor van végtelen sok megoldása, ha mindkét rang 2, tehát ha $\alpha = -3$ és $\beta = 8$.
b) Akkor nem létezik megoldás, ha a kibővített mátrix rangja nagyobb mint az együtthatómátrix rangja, tehát ha $\alpha = -3$ és $\beta \neq 8$.