Matematika A2c gyakorlat

Vegyészmérnöki, Biomérnöki, Környezetmérnöki szakok, 2017/18 ősz

3. feladatsor: Rang, lineáris egyenletrendszerek, lineáris transzformációk (megoldás)

---

1. Számítsuk ki a megadott mátrix rangját $\lambda \in \mathbb{R}$ függvényében.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

Megoldás. Az utolsó oszlop elhagyásával kapott négyzetes mátrix determinánsa $\lambda^3 - 3\lambda + 2 = (\lambda-1)^2(\lambda+2)$. Tehát ha $\lambda \neq 1$ és $\lambda \neq 2$, akkor a rang 3 (több nem lehet, hiszen csak három sor van). Ha $\lambda = 1$, akkor minden oszlop ugyanaz a (nullától különböző) vektor, tehát a rang 1. Ha viszont $\lambda = 2$, akkor az első oszlop elhagyásával kapott mátrix determinánsa -3, így a rang ekkor is 3.

2. Állapítsuk meg, hogy a megadott egyenletrendszernek hány megoldása van az u, v valós paraméterek függvényében.

a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 - ux_2 &= 2 \\ x_1 + vx_2 &= 2 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= v \\ -x_1 + ux_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Megoldás. Az egyenletrendszerek kibővített mátrixát sorműveletek segítségével egyszerűbb alakra hozzuk, hogy az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangját is le tudjuk olvasni. Ha a két rang egyenlő, akkor létezik megoldás, egyébként nem létezik. Az előbbi esetben ha az ismeretlenek száma megegyezik a ranggal, akkor egyértelmű a megoldás, egyébként végtelen sok van.

a)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -u & 2 \\ 1 & v & 2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2-u & 1 \\ 0 & -2+v & 1 \end{array}\right]$$

Ha $u = -2$ vagy $v = 2$, akkor az utolsó két egyenlet valamelyike ellentmondásra vezet. Ha viszont $u \neq -2$ és $v \neq 2$, akkor az együtthatómátrix rangja 2, ami egyben az ismeretlenek száma is. A kibővített mátrix rangja 2 ha $-u = v$, egyébként pedig 3. Tehát nincs megoldás, ha $u = -2$ vagy $v = 2$ vagy $-u \neq v$, minden más paraméterérték mellett pontosan egy megoldás van.

b)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & v \\ -1 & u & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & v \\ -1 & u & 1 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & v-3 \\ 0 & u+2 & 0 & 6 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & v-1 \\ 0 & 0 & 3u+6 & 14-2u \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 3u+6 & 14-2u \\ 0 & 0 & 0 & v-1 \end{array}\right]$$

A harmadik egyenletnek nem tűnik el egyszerre a két oldala, tehát legalább 3 a kibővített mátrix rangja. Ha $v \neq 1$ vagy $u = -2$, akkor az utolsó két egyenlet valamelyike ellentmondásra vezet, tehát ekkor nincs megoldás. Ha $v = 1$ és $u \neq -2$, akkor viszont mindkét rang 3, és ennyi az ismeretlenek száma is, tehát ilyenkor pontosan egy megoldás van.

3. A Cramer-szabály segítségével számoljuk ki a megadott egyenletrendszerben a megadott ismeretlen értékét.

a) $x_4 =?$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -8 \end{aligned}$$

b) $x_1 =?$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 &= -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 &= 5 \end{aligned}$$

Megoldás. Az egyenletrendszereket írjuk $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vektoros alakba, és jelölje A_i azt a mátrixot, amelyet A-ból úgy kapunk, hogy az i. oszlopot a $\mathbf{b}$ oszlopvektorra cseréljük. A Cramer-szabály szerint ha A invertálható, akkor a megoldás $x_i = \frac{\det A_i}{\det A}$.

a)

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -5 & -8 & 1 \\ 0 & -4 & -10 & 8 \\ 0 & -7 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -8 & 1 \\ -4 & -10 & 8 \\ -7 & -4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & -8 & 1 \\ 0 & -\frac{18}{5} & \frac{36}{5} \\ 0 & \frac{36}{5} & \frac{18}{5} \end{vmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} -18 & 36 \\ 36 & 18 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5} \cdot (-1620) = 324$$

és

$$\det A_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & -2 & 8 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -8 & -4 \\ 0 & -4 & -10 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & -20 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -5 & -8 & -4 \\ -4 & -10 & -14 \\ -7 & -4 & -20 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{vmatrix} -5 & -8 & -4 \\ 0 & -18 & -54 \\ 0 & 36 & -72 \end{vmatrix} = -\frac{1}{5} \cdot 3240 = -648,$$

így $x_4 = \frac{-648}{324} = -2$.

b)

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ -9 & -4 & -4 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ -9 & -4 & -4 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \\ -13 & -4 & -4 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ -13 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 98,$$

és

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ -5 & -4 & -4 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 3 \\ -5 & -4 & -4 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 3 \\ -13 & -4 & -4 & -4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -4 & 0 & 3 \\ -13 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 98,$$

így $x_1 = \frac{98}{98} = 1$.

4. Vizsgáljuk meg, hogy a megadott transzformáció lineáris-e, és ha igen, írjuk fel a mátrixát $\mathbb{R}^2$ megadott bázisában.
   a) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x + y \\ 5x - 2y \end{bmatrix}$ a standard bázisban.
   b) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x + y \\ 5x - 2y \end{bmatrix}$ az $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázisban.
   c) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x + y + 1 \\ 5x - 2y \end{bmatrix}$ a standard bázisban.

Megoldás.

a) A transzformáció lineáris, mivel

$$
\begin{aligned}
L\left(\alpha_1\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\right) &= L\left(\begin{bmatrix}\alpha_1x_1+\alpha_2x_2\\\alpha_1y_1+\alpha_2y_2\end{bmatrix}\right)\\
&= \begin{bmatrix}3(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)+(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)\\5(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2)-2(\alpha_1y_1+\alpha_2y_2)\end{bmatrix}\\
&= \alpha_1\begin{bmatrix}3x_1+y_1\\5x_1-2y_1\end{bmatrix}+\alpha_2\begin{bmatrix}3x_2+y_2\\5x_2-2y_2\end{bmatrix}\\
&= \alpha_1L\left(\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}\right)+\alpha_2L\left(\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}\right).
\end{aligned}
$$

A standard báziselemek képei

$$
\begin{aligned}
L\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix}3\\5\end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\\
L\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

tehát a transzformáció mátrixa ebben a bázisban

$$
\begin{bmatrix}3 & 1\\5 & -2\end{bmatrix}.
$$

b) A transzformáció megegyezik az *a*) feladatbelivel, tehát lineáris. A megadott báziselemek képei

$$
\begin{aligned}
L\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix}4\\3\end{bmatrix} = \frac{7}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\\
L\left(\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix}-2\\-7\end{bmatrix} = -\frac{9}{2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}-\frac{5}{2}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

tehát a transzformáció mátrixa ebben a bázisban

$$
\begin{bmatrix}\frac{7}{2} & -\frac{9}{2}\\-\frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\end{bmatrix}
$$

Megjegyzés. Az új bázisban L mátrixát kiszámíthatjuk a standard bázisbeli mátrixból bázistranszformációval is. Legyen S az a mátrix, aminek oszlopai az új bázis koordinátái a régi bázisra nézve:

$$
S=\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}
$$

Ha M jelöli L mátrixát a régi bázisban, akkor az új bázisban a mátrix $S^{-1}MS$:

$$
S^{-1}MS=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1\\5 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{7}{2} & -\frac{9}{2}\\-\frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\end{bmatrix}
$$

c) Ez a transzformáció nem lineáris. Ha ugyanis az lenne, akkor a nullvektor képe a nullvektor lenne, de ehelyett a kép $\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}^T$.

5. Írjuk fel a megadott lineáris transzformációk mátrixát a sík/tér standard bázisában.
   a) a sík origó körüli forgatása α szöggel pozitív irányban

b) az origón átmenő, $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix}^T$ normálvektorú síkra vett merőleges vetítés

c) az origón átmenő, $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix}^T$ normálvektorú síkra vett tükrözés

d) az $x = y = z$ egyenes körüli 120°-os forgatás a pozitív oktáns felől nézve pozitív forgásirányban.

Megoldás.

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ elforgatottja $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ elforgatottja pedig $\begin{bmatrix} -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}^T$. Tehát a transzformáció mátrixa

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

b) Jelölje P az $\mathbf{n}$ egyenesére való merőleges vetítést. Ez is lineáris transzformáció, és a síkra vett merőleges vetítés $I - P$.

$$P\mathbf{x} = \mathbf{n} \cdot \frac{\langle \mathbf{n}, \mathbf{x} \rangle}{\langle \mathbf{n}, \mathbf{n} \rangle} = \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^T}{|\mathbf{n}|^2}\mathbf{x}$$

alapján P mátrixa $|\mathbf{n}|^{-2}\mathbf{n}\mathbf{n}^T$, így a síkra vett merőleges vetítés mátrixa

$$I - \frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^T}{|\mathbf{n}|^2} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{A^2}{A^2+B^2+C^2} & -\frac{AB}{A^2+B^2+C^2} & -\frac{AC}{A^2+B^2+C^2} \\ -\frac{AB}{A^2+B^2+C^2} & 1 - \frac{B^2}{A^2+B^2+C^2} & -\frac{BC}{A^2+B^2+C^2} \\ -\frac{AC}{A^2+B^2+C^2} & -\frac{BC}{A^2+B^2+C^2} & 1 - \frac{C^2}{A^2+B^2+C^2} \end{bmatrix}.$$

c) A tükrözés és az identitás összege éppen a merőleges vetítés kétszerese, tehát a síkra vett tükrözés mátrixa

$$I - 2\frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^T}{|\mathbf{n}|^2} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2A^2}{A^2+B^2+C^2} & -\frac{2AB}{A^2+B^2+C^2} & -\frac{2AC}{A^2+B^2+C^2} \\ -\frac{2AB}{A^2+B^2+C^2} & 1 - \frac{2B^2}{A^2+B^2+C^2} & -\frac{2BC}{A^2+B^2+C^2} \\ -\frac{2AC}{A^2+B^2+C^2} & -\frac{2BC}{A^2+B^2+C^2} & 1 - \frac{2C^2}{A^2+B^2+C^2} \end{bmatrix}.$$

d) A mátrixot most legkönnyebben a definíció alapján számolhatjuk, hiszen a forgatás a standard bázis vektorait permutálja: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ képe $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, ennek $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$ a képe, aminek viszont $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ a képe. Így a transzformáció mátrixa

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

További gyakorló feladatok

6. Számítsuk ki a megadott mátrix rangját $\lambda \in \mathbb{C}$ függvényében.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & -1 & \lambda \\ -1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & \lambda & \lambda \end{bmatrix}$$

Megoldás. Mivel az utolsó oszlop az első három összege, a rang megegyezik az utolsó oszlop elhagyásával kapott részmátrix rangjával. Ennek a 3×3 mátrixnak a determinánsa $\lambda(3+\lambda^2)$, aminek zérushelyei $0, \pm\sqrt{3}i$. Ha λ ezektől különbözik, akkor biztosan 3 a rang, ha viszont ezek valamelyike, akkor legfeljebb 2 lehet. A bal felső 2×2 részmátrix determinánsa $1+\lambda^2$, ez mindhárom esetben különbözik nullától, így a rang $\lambda = 0, \pm\sqrt{3}i$ esetén 2.

7. Állapítsuk meg, hogy a megadott egyenletrendszernek hány megoldása van az u, v valós paraméterek függvényében.

a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + ux_2 &= v \\ 3x_1 + 6x_2 &= 3 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + ux_2 &= 5 \\ 3x_1 + 6x_2 &= v \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + ux_3 &= v - 2 \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 &= v \end{aligned}$$

Megoldás. Végezzünk Gauss-eliminációt a kibővített mátrixokon:

a)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & u & v \\ 3 & 6 & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & u-6 & v-3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Az együtthatómátrix rangja 1 ha $u = 6$, egyébként 2. A kibővített mátrixnak 1 a rangja, ha $u = 6$ és $v = 3$, egyébként 2. Az ismeretlenek száma kettő, tehát a megoldásszám 0, ha $u = 6$ és $v \neq 3$, egy megoldás van, ha $u \neq 6$ és végtelen sok megoldás van, ha $u = 6$, $v = 3$.

b)

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 3 & u & 5 \\ 3 & 6 & v \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1 \\ 0 & u-6 & 2 \\ 0 & 0 & v-3 \end{array}\right]$$

Az együtthatómátrix rangja 1, ha $u = 6$, egyébként 2. A kibővített mátrix rangja 3 ha $u \neq 6$ és $v \neq 3$, egyébként 2, hiszen az utolsó sor és a középső oszlop elhagyásával kapott mátrixnak nem nulla a determinánsa. Az ismeretlenek száma kettő, tehát a megoldásszám 0, ha $u = 6$ vagy $v \neq 3$, egy megoldás van, ha $u \neq 6$ és $v = 3$, és semmilyen paraméterérték mellett nincs végtelen sok megoldás.

c)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & u & v-2 \\ 4 & 7 & 1 & v \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & u-6 & v-5 \\ 0 & -1 & -7 & v-4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & u-6 & v-5 \\ 0 & 0 & -8 & v-5 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & v-5 \\ 0 & 0 & u-6 & v-5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -8 & v-5 \\ 0 & 0 & 0 & (u+2)(v-5) \end{array}\right]$$

Az együtthatómátrix rangja mindig 3, a kibővített mátrixa 4 ha $u \neq -2$ és $v \neq 5$, egyébként pedig 3. Tehát ha $u \neq -2$ és $v \neq 5$, akkor nem létezik megoldás, ha viszont $u = -2$ vagy $v = 5$, akkor pontosan egy megoldás létezik.

8. A Cramer-szabály segítségével számoljuk ki a megadott egyenletrendszerben a megadott ismeretlen értékét.

   a) $x_2 =?$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 8x_4 &= 4 \end{aligned}$$

   b) $x_1 =?$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + ix_2 - x_3 - ix_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - ix_2 - x_3 + ix_4 &= 1 \end{aligned}$$

   Megoldás.

   a)

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 & 8 \\ 1 & 4 & 4 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{216}{72} = 3$$

   b)

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix}} = \frac{-8i}{-16i} = \frac{1}{2}$$

9. Vizsgáljuk meg, hogy a megadott transzformáció lineáris-e, és ha igen, írjuk fel a mátrixát $\mathbb{R}^2$ megadott bázisában.

   a) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 9x - 7y \\ x + y \end{bmatrix}$ a standard bázisban.

   b) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 9x - 7y \\ x + y \end{bmatrix}$ az $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázisban.

   c) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ x^2 - y^2 \end{bmatrix}$ a standard bázisban.

Megoldás.

a) A transzformáció lineáris, mivel

$$\begin{aligned}
L\left(\alpha_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) &= L\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \end{bmatrix}\right) \\
&= \begin{bmatrix} 9(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) - 7(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \\ (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \end{bmatrix} \\
&= \alpha_1 \begin{bmatrix} 9x_1 - 7y_1 \\ x_1 + y_1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 9x_2 - 7y_2 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix} \\
&= \alpha_1 L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + \alpha_2 L\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right).
\end{aligned}$$

A standard báziselemek képei

$$\begin{aligned}
L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \end{bmatrix} = -7 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

tehát a transzformáció mátrixa ebben a bázisban

$$\begin{bmatrix} 9 & -7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) A transzformáció megegyezik az a) feladatbelivel, így lineáris. Az új bázisban felírt mátrixot meghatározhatjuk bázistranszformációval. Legyen

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

az új bázis elemeinek standard bázisra vonatkozó koordinátáiból képzett oszlopokból álló mátrix, ekkor L mátrixa az új bázisban

$$S^{-1} \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 & -7 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

c) A megadott transzformáció nem lineáris, mivel

$$L\left(\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha(x+y) \\ \alpha^2(x^2 - y^2) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \alpha(x+y) \\ \alpha(x^2 - y^2) \end{bmatrix} = \alpha L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right).$$

10. Írjuk fel a megadott lineáris transzformációk mátrixát a sík/tér standard bázisában.

a) síkban az origón átmenő, az x tengellyel α szöget bezáró egyenesre vett merőleges vetítés

b) a sík tükrözése az origón átmenő, az x tengellyel α szöget bezáró egyenesre

c) térben a z tengely körüli α szögű forgatás

d) térben az x tengely körüli α szögű forgatás

e) térben a $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix}^T$ irányvektorú egyenesre vett tükrözés

Megoldás.

a) A mátrixot a $\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\end{bmatrix}^T$, $\begin{bmatrix}-\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^T$ bázisban könnyű felírni, hiszen az előbbi báziselemet önmagába, az utóbbit a nullvektorba képezi. Bázistranszformációval kapjuk a mátrixot a standard bázisban:

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha\\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha\end{bmatrix}.$$

b) Érdemes most is bázistranszformációt használni:

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix}\cos^2\alpha - \sin^2\alpha & 2\cos\alpha\sin\alpha\\ 2\cos\alpha\sin\alpha & -\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha\end{bmatrix}.$$

c) A mátrixot közvetlenül felírhatjuk, ha leolvassuk a standard bázisvektorok elforgatottjainak koordinátáit. Az utolsó koordináta nem változik, mivel a z tengely körül forgatunk, az első kettő pedig az x-y sík forgatásából ismert módon változik. A transzformáció mátrixa

$$\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha & 0\\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

.

d) A z tengely körüli forgatáshoz hasonló, de a koordináták szerepet cserélnek:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}$$

e) Ha P jelöli a $\mathbf{v}$ egyenesére vett merőleges vetítés mátrixát, akkor a tükrözés mátrixa $2P - I$. $\mathbf{x}$ vetülete $\mathbf{v}\frac{\langle \mathbf{v},\mathbf{x}\rangle}{\langle \mathbf{v},\mathbf{v}\rangle}$, tehát a mátrix

$$2\frac{\mathbf{v}\mathbf{v}^T}{|\mathbf{v}|^2} - I = \begin{bmatrix}\frac{2A^2}{A^2+B^2+C^2} - 1 & \frac{2AB}{A^2+B^2+C^2} & \frac{2AC}{A^2+B^2+C^2}\\ \frac{2AB}{A^2+B^2+C^2} & \frac{2B^2}{A^2+B^2+C^2} - 1 & \frac{2BC}{A^2+B^2+C^2}\\ \frac{2AC}{A^2+B^2+C^2} & \frac{2BC}{A^2+B^2+C^2} & \frac{2C^2}{A^2+B^2+C^2} - 1\end{bmatrix}.$$

11. Egy A négyzetes mátrix *ortogonális*, ha $A^{-1} = A^T$, és *idempotens*, ha $A^2 = A$. Igazoljuk, hogy ha A ortogonális, akkor $\det(A) = \pm 1$, és ha idempotens, akkor $\det(A) = 0$ vagy 1.

Megoldás. Legyen A ortogonális mátrix. Mivel

$$\det(A) = \det(A^T) = \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)},$$

$\det(A)^2 = 1$, azaz $\det(A) = \pm 1$.
Tegyük fel, hogy A idempotens mátrix. Ekkor

$$\det(A) = \det(A^2) = \det(A)^2,$$

tehát $\det(A)(1 - \det(A)) = 0$. Ez csak akkor fordulhat, ha $\det(A) = 0$ vagy $\det(A) = 1$.