Matematika A2c gyakorlat

Vegyészmérnöki, Biomérnöki, Környezetmérnöki szakok, 2017/18 ősz

3. feladatsor: Rang, lineáris egyenletrendszerek, lineáris transzformációk

---

1. Számítsuk ki a megadott mátrix rangját $\lambda \in \mathbb{R}$ függvényében.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{bmatrix}$$

2. Állapítsuk meg, hogy a megadott egyenletrendszernek hány megoldása van az u, v valós paraméterek függvényében.

   a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ x_1 - ux_2 &= 2 \\ x_1 + vx_2 &= 2 \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= v \\ -x_1 + ux_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

3. A Cramer-szabály segítségével számoljuk ki a megadott egyenletrendszerben a megadott ismeretlen értékét.

   a) $x_4 =?$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 &= 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= -8 \end{aligned}$$

   b) $x_1 =?$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 &= -2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 &= 5 \end{aligned}$$

4. Vizsgáljuk meg, hogy a megadott transzformáció lineáris-e, és ha igen, írjuk fel a mátrixát $\mathbb{R}^2$ megadott bázisában.

   a) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x + y \\ 5x - 2y \end{bmatrix}$ a standard bázisban.

   b) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x + y \\ 5x - 2y \end{bmatrix}$ az $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázisban.

c) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x+y+1 \\ 5x-2y \end{bmatrix}$ a standard bázisban.

5. Írjuk fel a megadott lineáris transzformációk mátrixát a sík/tér standard bázisában.
   a) a sík origó körüli forgatása α szöggel pozitív irányban
   b) az origón átmenő, $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix}^T$ normálvektorú síkra vett merőleges vetítés
   c) az origón átmenő, $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix}^T$ normálvektorú síkra vett tükrözés
   d) az $x = y = z$ egyenes körüli 120°-os forgatás a pozitív oktáns felől nézve pozitív forgásirányban.

További gyakorló feladatok

6. Számítsuk ki a megadott mátrix rangját $\lambda \in \mathbb{C}$ függvényében.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & -1 & \lambda \\ -1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & -1 & \lambda & \lambda \end{bmatrix}$$

7. Állapítsuk meg, hogy a megadott egyenletrendszernek hány megoldása van az u, v valós paraméterek függvényében.
   a)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + ux_2 &= v \\ 3x_1 + 6x_2 &= 3 \end{aligned}$$

   b)

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 1 \\ 3x_1 + ux_2 &= 5 \\ 3x_1 + 6x_2 &= v \end{aligned}$$

   c)

$$\begin{aligned} 1x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 + ux_3 &= v - 2 \\ 4x_1 + 7x_2 + x_3 &= v \end{aligned}$$

8. A Cramer-szabály segítségével számoljuk ki a megadott egyenletrendszerben a megadott ismeretlen értékét.
   a) $x_2 = ?$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 8x_4 &= 4 \end{aligned}$$

   b) $x_1 = ?$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_1 + ix_2 - x_3 - ix_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_1 - ix_2 - x_3 + ix_4 &= 1 \end{aligned}$$

9. Vizsgáljuk meg, hogy a megadott transzformáció lineáris-e, és ha igen, írjuk fel a mátrixát $\mathbb{R}^2$ megadott bázisában.
   a) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 9x - 7y \\ x + y \end{bmatrix}$ a standard bázisban.
   b) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 9x - 7y \\ x + y \end{bmatrix}$ az $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázisban.
   c) $L\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ x^2 - y^2 \end{bmatrix}$ a standard bázisban.
10. Írjuk fel a megadott lineáris transzformációk mátrixát a sík/tér standard bázisában.
    a) síkban az origón átmenő, az x tengellyel α szöget bezáró egyenesre vett merőleges vetítés
    b) a sík tükrözése az origón átmenő, az x tengellyel α szöget bezáró egyenesre
    c) térben a z tengely körüli α szögű forgatás
    d) térben az x tengely körüli α szögű forgatás
    e) térben a $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix}^T$ irányvektorú egyenesre vett tükrözés
11. Egy A négyzetes mátrix *ortogonális*, ha $A^{-1} = A^T$, és *idempotens*, ha $A^2 = A$. Igazoljuk, hogy ha A ortogonális, akkor $\det(A) = \pm 1$, és ha idempotens, akkor $\det(A) = 0$ vagy 1.