Matematika A2c gyakorlat

Vegyészmérnöki, Biomérnöki, Környezetmérnöki szakok, 2017/18 ősz

4. feladatsor: Sajátérték és sajátvektor, szétválasztható és elsőrendű lineáris differenciálegyenletek (megoldás)

---

1. Határozzuk meg a sajátértékeket és sajátvektorokat.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Megoldás.

a) A sajátértékek a

$$0 = \det\left(\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(5-\lambda) - 2\cdot 2 = \lambda^2 - 7\lambda + 6$$

egyenlet megoldásai, tehát $\lambda = 1$ és $\lambda = 6$.
A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - 1\cdot I = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix}^T$ (nullvektortól különböző) többszörösei.
A $\lambda = 6$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok meghatározása:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} - 1\cdot I = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix},$$

így a megoldások $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}^T$ többszörösei.

b)

$$\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix} - \lambda I\right) = \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ -4 & 2-\lambda & -3 \\ 4 & 2 & -3-\lambda \end{bmatrix} = -(\lambda-1)\lambda(\lambda+1)$$

gyökei -1, 0 és 1.
A $\lambda = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$ többszörösei.
A $\lambda = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix}0 & 3 & 2\end{bmatrix}^T$ többszörösei.
A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -4 & 1 & -3\\ 4 & 2 & -4\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}-4 & 1 & -3\\ 4 & 2 & -4\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}-4 & 1 & -3\\ 0 & 3 & -7\end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix}-1 & 14 & 6\end{bmatrix}^T$ többszörösei.

c)

$$\det\left(\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ 0 & 4 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} - \lambda I\right) = \begin{bmatrix}1-\lambda & -3 & 3\\ 0 & 4-\lambda & 3\\ 0 & 0 & 1-\lambda\end{bmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-4)$$

gyökei 1 (kétszeres) és 4 (egyszeres).
A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix}0 & -3 & 3\\ 0 & 3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$ többszörösei.
A $\lambda = 4$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix}-3 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}-1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\end{bmatrix}^T$ többszörösei.

2. Tudjuk, hogy az $A = \begin{bmatrix}1 & 5\\ a & 1\end{bmatrix}$ mátrix egyik sajátvektora $\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$. Határozzuk meg az a paraméter értékét, a sajátértékeket és a másik sajátvektort.

Megoldás. $\mathbf{v}$ sajátvektor λ sajátértékkel, ha $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Ebből

$$\begin{bmatrix}\lambda\\ \lambda\end{bmatrix} = \lambda\mathbf{v} = A\mathbf{v} = \begin{bmatrix}1 & 5\\ a & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6\\ 1+a\end{bmatrix},$$

tehát $\lambda = 6$ és $a = 5$. A két sajátérték szorzata $\det A = -24$, tehát a másik sajátérték -4. Az ehhez tartozó sajátvektorok

$$A + 4I = \begin{bmatrix}5 & 5\\ 5 & 5\end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^T$ többszörösei.

Megjegyzés. a meghatározása után úgy is lehet gondolkodni, hogy az A mátrix valós szimmetrikus, tehát létezik sajátvektorokból álló ortonormált bázis (sőt: páronként ortogonális sajátvektorok bármely halmaza kiegészíthető ugyanilyen tulajdonságú bázissá). Két dimenzióban tehát $\mathbf{v}$ mellett a rá merőleges vektorok is szükségképpen sajátvektorok.

$$A\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-4\\ 4\end{bmatrix}$$

miatt a másik sajátérték -4.

3. Adjuk meg az $y'' = e^{-3x} + 2x$ differenciálegyenlet általános megoldását. Adjuk meg azt a partikuláris megoldást, amely eleget tesz az $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ kezdeti feltételeknek.

   Megoldás. Az egyenlet másodrendű, de a jobb oldalon nem szerepel sem y, sem y', így az általános megoldást kétszeri integrálással kaphatjuk meg:

$$y'(x) = -\frac{e^{-3x}}{3} + x^2 + C_1$$

   és

$$y(x) = \frac{e^{-3x}}{9} + \frac{x^3}{3} + C_1x + C_2.$$

   Erre $y(0) = \frac{1}{9} + C_2$ és $y'(0) = -\frac{1}{3} + C_1$ teljesül, tehát a megadott kezdeti feltételből $C_2 = \frac{8}{9}$ és $C_1 = \frac{7}{3}$. A keresett megoldás

$$y(x) = \frac{e^{-3x}}{9} + \frac{x^3}{3} + \frac{7}{3}x + \frac{8}{9}.$$

4. Adjuk meg az $y' = \frac{x}{y}e^{2x-3y^2}$ $(y \neq 0)$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. A differenciálegyenlet szétválasztható, ennek megfelelően rendezzük át:

$$ye^{3y^2}y' = xe^{2x}.$$

   Mindkét oldalt integráljuk x szerint, két primitív függvény egymástól csak egy additív konstansban különbözhet:

$$\frac{1}{6}e^{3y^2} = \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C,$$

   tehát

$$y(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{3}\ln\left(3xe^{2x} - \frac{3}{2}e^{2x} + 6C\right)}$$

5. Adjuk meg az $y' = \frac{y-2}{xy}$ $(x \neq 0,\ y \neq 0)$ differenciálegyenlet általános megoldását. Oldjuk meg az $y(1) = 2$, $y(1) = 3$, illetve az $y(-1) = -3$ kezdeti feltételek mellett.

   Megoldás. Az egyenlet szétválasztható:

$$\frac{y}{y-2}y' = \frac{1}{x}.$$

   Mindkét oldalt intergáljuk x szerint:

$$\int \frac{y}{y-2}y'\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{2}{y-2}\right)\mathrm{d}y = y + 2\ln|y-2| = \ln|x| + C.$$

   Ebből nem lehet elemi függvényekkel kifejezni az $y(x)$ függvényt, de a különféle kezdeti feltételekhez meghatározhatjuk a C konstans értékét:

$$\begin{aligned} y(1) &= 2 && \text{nem kapjuk meg az általános megoldásból} \\ y(1) &= 3 && \rightsquigarrow C = 3 \\ y(-1) &= -3 && \rightsquigarrow C = -3 + 2\ln 5 \end{aligned}$$

   Az $y(1) = 2$ kezdeti feltételt külön kell vizsgálni. Látható, hogy a derivált mindaddig 0, amíg $y = 2$, tehát az $y(x) = 2$ konstans függvény megoldja az egyenletet, és ez ki is elégíti a kezdeti feltételt.

6. Oldjuk meg a következő szétválasztható változójú egyenleteket:

a) $y' = \dfrac{y^2+4y+9}{(x-1)(x+5)}, \quad (x \neq 1,\ x \neq -5)$

b) $y' = (3x-1)^5(y^2-4y)$

c) $y' = \dfrac{2y^2+3}{y} 2xe^{-4x^2}, \quad (y \neq 0)$

Megoldás.

a) Átrendezve

$$\frac{1}{y^2+4y+9} y' = \frac{1}{(x-1)(x+5)},$$

A bal oldalon a nevezőt teljes négyzetté alakítjuk, a jobb oldalt parciális törtekre bontjuk, mindkét oldalt integráljuk:

$$\int \frac{1}{5} \frac{1}{\left(\frac{y+2}{\sqrt{5}}\right)+1} \, \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{6} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{6} \frac{1}{x+5} \right) \mathrm{d}x$$

azaz

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \arctan \frac{y+2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{6} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln|x+5| + C,$$

amiből y kifejezhető (lent C egy másik tetszőleges szám):

$$y(x) = 2 + \sqrt{5} \tan \left(\frac{\sqrt{5}}{6} \ln|x-1| - \frac{\sqrt{5}}{6} \ln|x+5| + C \right).$$

b) Átrendezés és parciális törtekre bontás után az egyenlet

$$\left(\frac{1}{4} \frac{1}{y-4} - \frac{1}{4} \frac{1}{y} \right) y' = (3x-1)^5$$

lesz, mindkét oldalt integráljuk:

$$\frac{1}{4} \ln|y-4| - \frac{1}{4} \ln|y| = \frac{1}{3} \frac{(3x-1)^6}{6} + C,$$

azaz

$$\ln\left|1 - \frac{4}{y}\right| = \frac{2}{9}(3x-1)^6 + C,$$

amiből y kifejezhető:

$$y(x) = \frac{4}{1 - Ce^{\frac{2}{9}(3x-1)^6}}.$$

c) Átrendezés után az egyenlet

$$\frac{1}{4} \frac{4y}{2y^2+3} y' = -\frac{1}{4}(-8)xe^{-4x^2},$$

integráljuk mindkét oldalt:

$$\frac{1}{4} \ln(2y^2+3) = -\frac{1}{4} e^{-4x^2} + C,$$

amiből

$$y = \pm \sqrt{\frac{e^{-e^{-4x^2}+C} - 3}{2}}.$$

7. A rádium bomlási sebessége arányos a pillanatnyi rádiummennyiséggel. Tudjuk, hogy a rádium (^{226}Ra) felezési ideje 1600 év. A kiindulási anyag mennyiségének hány százaléka bomlik el 100 év alatt?

   Megoldás. Legyen x év után $y(x)$ a rádium mennyisége, ekkor $y'(x) = -\lambda y(x)$ valamilyen $\lambda > 0$ számmal (bomlásállandó), tehát $y(x) = Ce^{-\lambda x}$. A felezési idő alapján $\frac{1}{2} = e^{-\lambda T_{1/2}}$, azaz $\lambda = \frac{\log 2}{T_{1/2}}$.

$$1 - e^{-100\lambda} = 1 - e^{-100\frac{\log 2}{T_{1/2}}} = 0{,}042396\ldots$$

   tehát kb. 4,24% bomlik el 100 év alatt.

8. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát.

$$y' - \frac{x}{x^2+4}y = 6x, \qquad y(0) = 4$$

   Megoldás. Az egyenlet elsőrendű inhomogén lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg:

$$y' - \frac{x}{x^2+4}y = 0,$$

   ez szétválasztható:

$$\frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2+4},$$

   tehát a homogén egyenlet megoldása

$$y(x) = \sqrt{x^2+4}.$$

   Az inhomogén egyenlet általános megoldását az állandók variálásának módszere szerint $C(x)\sqrt{x^2+4}$ alakban keressük, ezt behelyettesítve

$$C'(x)\sqrt{x^2+4} = 6x$$

   adódik, amiből

$$C(x) = \int 3 \cdot 2x(x^2+4)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 3\frac{(x^2+4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 6\sqrt{x^2+4} + C.$$

   Az inhomogén egyenlet általános megoldása eszerint

$$y(x) = 6x^2 + 24 + C\sqrt{x^2+4},$$

   erre $y(0) = 24 + 2C$, a kezdeti feltétel alapján $C = -10$.

9. Adjuk meg az $y' - \dfrac{2}{x}y = x$ differenciálegyenlet általános megoldását. Oldjuk meg az $y(1) = 3$, illetve az $y(-e) = 3e^2$ kezdetiérték-problémákat.

   Megoldás. Az egyenlet elsőrendű inhomogén lineáris, a hozzá tartozó homogén egyenlet

$$y' - \frac{2}{x}y = 0,$$

   azaz

$$\frac{y'}{y} = \frac{2}{x},$$

aminek a megoldása $y(x) = Cx^2$, ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges.
Az állandók variálásának módszere szerint az inhomogén egyenlet általános megoldását $C(x)x^2$ alakban keressük. Ezt behelyettesítve az

$$C'(x)x^2 = x$$

egyenlet adódik, ebből $C(x) = \ln|x| + C$, tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = x^2 \ln|x| + Cx^2.$$

$y(1) = 3$ kezdeti feltétel mellett $C = 3$, míg $y(-e) = 3e^2$ kezdeti feltétel mellett $C = 2$.

10. Oldjuk meg az alábbi elsőrendű egyenleteket.
    a) $y' - 3x^2 y = 6x^2$
    b) $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad (x \neq 0)$
    c) $y' + \dfrac{5}{x}y = e^x x^{-4}, \quad (x \neq 0)$
    d) $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{2}, \quad y(1) = 1$

    Megoldás.
    a) A homogén egyenlet $y' - 3x^2 y = 0$, átrendezve

    $$\frac{y'}{y} = 3x^2,$$

    ennek megoldása

    $$y(x) = Ce^{x^3}.$$

    Az állandók variálásának módszere szerint az inhomogén egyenlet általános megoldását $C(x)e^{x^3}$ alakban keressük, a $C(x)$ függvényre az alábbi egyenlet teljesül:

    $$C'(x)e^{x^3} = 6x^2,$$

    azaz

    $$C(x) = \int 6x^2 e^{-x^3}\,\mathrm{d}x = -2e^{-x^3} + C.$$

    Az általános megoldás

    $$y(x) = -2 + Ce^{x^3}.$$

    b) A homogén egyenlet $y' + \frac{2}{x}y = 0$, átrendezve

    $$\frac{y'}{y} = -\frac{2}{x},$$

    mindkét oldal integrálása után

    $$\ln|y| = -2\ln|x| = \ln\left|\frac{1}{x^2}\right|,$$

    azaz $y(x) = Cx^{-2}$.

Az inhomogén egyenletbe $y(x) = C(x)x^{-2}$ helyettesítése után a kapott egyenlet

$$C'(x)\frac{1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2},$$

tehát

$$C(x) = \int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x = x - \arctan x + C,$$

vagyis az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = \frac{1}{x} - \frac{\arctan x}{x^2} + C\frac{1}{x^2}.$$

c) A homogén egyenlet $y' + \frac{5}{x}y = 0$, átrendezve

$$\frac{y'}{y} = -5\frac{1}{x},$$

tehát

$$y(x) = Cx^{-5}.$$

Az inhomogén egyenlet megoldása $C(x)x^{-5}$, ahol

$$C'(x)x^{-5} = e^x x^{-4},$$

tehát

$$C(x) = \int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C.$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása így

$$y(x) = x^{-4}e^x - x^{-5}e^x + Cx^{-5}.$$

d) A homogén egyenlet $y' + \frac{1}{x}y = 0$, ennek általános megoldása $y = C\frac{1}{x}$. Az inhomogén egyenlet megoldását $C(x)\frac{1}{x}$ alakban keressük:

$$C'(x)\frac{1}{x} = \frac{2}{x} + \frac{3}{2}$$

alapján

$$C(x) = \int \left(2 + \frac{3}{2}x\right)\mathrm{d}x = 2x + \frac{3}{4}x^2 + C,$$

azaz

$$y(x) = 2 + \frac{3}{4}x + C\frac{1}{x}.$$

A kezdeti feltétel alapján

$$1 = y(1) = 2 + \frac{3}{4} + C,$$

vagyis $C = -\frac{7}{4}$, a keresett megoldás $y(x) = 2 + \frac{3}{4}x - \frac{7}{4}\frac{1}{x}$.

További gyakorló feladatok

11. Határozzuk meg a sajátértékeket és sajátvektorokat.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -8 & 0 & 12 \\ 0 & -7 & 0 & 12 \\ 2 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -8 \\ 0 & 0 & 16 & 11 \end{bmatrix}$

Megoldás.

a)

$$\det\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 4 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \lambda + 6.$$

Egy harmadfokú polinom gyökeit általában hosszadalmas meghatározni, de az együtthatók egészek, így ha azt gyanítjuk, hogy van egész gyök, akkor azt a konstans tag osztói között megtalálhatjuk. 6 osztói $-6, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 6$, ezek közül -1, 2 és 3 gyökök, tehát mindhárom gyököt megtaláltuk (ha az egyik gyököt már ismerjük, akkor a megfelelő gyöktényezővel eloszthatjuk a polinomot, így további próbálgatás nélkül, egy másodfokú egyenlet megoldásával is megkaphatjuk a másik kettőt). A $\lambda = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ többszörösei.
A $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$ többszörösei.
A $\lambda = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}^T$ többszörösei.

b)

$$\det\left(\begin{bmatrix}-2&-3&-4\\1&4&2\\0&-3&0\end{bmatrix}-\lambda I\right)=\begin{vmatrix}-2-\lambda&-3&-4\\1&4-\lambda&2\\0&-3&-\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+2\lambda^2-\lambda=-\lambda(\lambda-1)^2,$$

tehát a sajátértékek 0 (egyszeres) és 1 (kétszeres).
A $\lambda=0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix}-2&-3&-4\\1&4&2\\0&-3&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&4&2\\-2&-3&-4\\0&-3&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&4&2&&\\0&5&00&-3&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&2\\0&1&0\end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix}2&0&-1\end{bmatrix}^T$ többszörösei.
A $\lambda=1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix}-3&-3&-4\\1&3&2\\0&-3&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&2\\-3&-3&-4\\0&-3&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&3&2\\0&6&2\\0&-3&-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&1\\0&3&1\end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix}3&1&-3\end{bmatrix}^T$ többszörösei.

c)

$$\det\left(\begin{bmatrix}1&-8&0&12\\0&-7&0&12\\2&0&-1&-4\\0&-4&0&7\end{bmatrix}-\lambda I\right)=\begin{vmatrix}1-\lambda&-8&0&12\\0&-7-\lambda&0&12\\2&0&-1-\lambda&-4\\0&-4&0&7-\lambda\end{vmatrix}$$
$$=\lambda^4-2\lambda^2+1=(\lambda+1)^2(\lambda-1)^2,$$

tehát a sajátértékek -1 és 1, mindkettő kétszeres.
A $\lambda=-1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix}2&-8&0&12\\0&-6&0&12\\2&0&0&-4\\0&-4&0&8\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}2&-8&0&12\\0&-6&0&12\\0&8&0&-16\\0&-4&0&8\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-4&0&6\\0&1&0&-2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&-2\\0&1&0&-2\end{bmatrix}$$

alapján a

$$\begin{bmatrix}2s\\2s\\t\\s\end{bmatrix}$$

alakú ($st\neq 0$) vektorok.
A $\lambda=-1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix}0&-8&0&12\\0&-8&0&12\\2&0&-2&-4\\0&-4&0&6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&-1&-2\\0&2&0&-3\end{bmatrix}$$

alapján a

$$\begin{bmatrix} 4s+t \\ 3s \\ t \\ 2s \end{bmatrix}$$

alakú ($st \neq 0$) vektorok.

d)

$$\det\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -8 \\ 0 & 0 & 16 & 11 \end{bmatrix} - \lambda I\right) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13-\lambda & -8 \\ 0 & 0 & 16 & 11-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} -1-\lambda & -1 \\ 12 & 6-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -13-\lambda & -8 \\ 16 & 11-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda-3)\cdot(\lambda+5)(\lambda-3),$$

tehát a sajátértékek -5, 2 (egyszeresek) és 3 (kétszeres).
A $\lambda = -5$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -8 \\ 0 & 0 & 16 & 16 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 14 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ többszörösei.
A $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & -8 \\ 0 & 0 & 16 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -15 & -8 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ többszörösei.
A $\lambda = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & -8 \\ 0 & 0 & 16 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

alapján a

$$\begin{bmatrix} -t \\ 4t \\ -s \\ 2s \end{bmatrix}$$

alakú ($st \neq 0$) vektorok.

12. Tudjuk, hogy az $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ mátrix egyik sajátvektora $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg az a paraméter értékét, a sajátértékeket és a másik sajátvektort.

Megoldás. A sajátérték-egyenlet alapján

$$\lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2+a \end{bmatrix}$$

teljesül, tehát $\lambda_1 = 4$ és $a = 2$. A másik sajátérték $\lambda_1 \lambda_2 = \det A = 4$ alapján $\lambda_2 = 1$, a hozzá tartozó sajátvektor

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ többszörösei.

13. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Bizonyítsuk be, hogy

$$A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

ahol F a Fibonacci-sorozatot jelöli, amely a $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ és $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ rekurzióval adott. Adjunk ennek segítségével zárt formulát F_n-re.

Megoldás. A sajátértékei $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$, a sajátvektorok $(1 \pm \sqrt{5}, 2)$, tehát $A = SDS^{-1}$, ahol

$$D = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} 1+\sqrt{5} & 1-\sqrt{5} \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Eszerint $A^n = (SDS^{-1})^n = SD^nS^{-1}$, aminek bal alsó eleme

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$

14. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket illetve kezdetiérték-problémákat:
   a) $(1 + x^2)y' + (1 + y^2) = 0$
   b) $y' = e^{-y} \sin^2 x$, $y(0) = 0$
   c) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$
   d) $y' - (\tan x + \cot x)y = -4 \sin^2 x$
   e) $xy' - y = x^3 + 1$, $y(2) = 5$

Megoldás.

a) Az egyenlet szétválasztható:

$$\frac{y'}{1+y^2} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Mivel nincs megadva kezdeti feltétel, egyszerűbb határozatlan integrállal folytatni, ügyelve arra, hogy a két oldal egy-egy primitív függvénye konstansban eltérhet egymástól:

$$\arctan y(x) = C - \arctan x$$

tehát $y(x) = \tan(C - \arctan x)$. Egyszerűbb alakot kaphatunk

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

felhasználásával:

$$y(x) = \tan(C - \arctan x) = \frac{\tan C - x}{1 + (\tan C)x}$$

vagy $\tan C$ helyett C-t írva (ez is tetszőleges konstans!):

$$y(x) = \frac{C - x}{1 + Cx}.$$

b) Az egyenlet szétválasztható, ráadásul e^{-y} sehol sem 0, tehát mindkét oldalt eloszthatjuk vele: $e^y y' = \sin^2 x$. Ezután integráljuk mindkét oldalt $x_0 = 0$-tól x-ig:

$$\begin{aligned}
\int_0^x e^{y(\xi)} y'(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int_0^x \sin^2 \xi\,\mathrm{d}\xi = \int_0^x \frac{1 - \cos 2\xi}{2}\,\mathrm{d}\xi \\
e^{y(x)} - e^{y(0)} &= \left[\frac{\xi}{2} - \frac{\sin 2\xi}{4}\right]_{\xi=0}^{\xi=x} \\
e^{y(x)} - 1 &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x.
\end{aligned}$$

Ebből $y(x)$ kifejezhető:

$$y(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x\right).$$

c) Az egyenlet elsőrendű lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg, ami szétválasztható:

$$\frac{y'}{y} = -2x.$$

A két oldal integrálása után $\ln|y(x)| = -x^2 + C$, vagy átrendezve és $\pm e^C$ helyett C-t írva $y(x) = Ce^{-x^2}$ adódik.
Az inhomogén egyenlet megoldását az állandók variálásának módszere szerint $y(x) = c(x)e^{-x^2}$ alakban keressük. Az egyenlet bal oldalába helyettesítjük:

$$\begin{aligned}
y'(x) + 2xy(x) &= c'(x)e^{-x^2} - c(x)2xe^{-x^2} + 2xc(x)e^{-x^2} \\
&= c'(x)e^{-x^2}.
\end{aligned}$$

A kapott kifejezésnek a jobb oldallal kell megegyeznie, tehát $c'(x) = 2x$, vagyis $c(x) = x^2 + C$, ahol C tetszőleges konstans. Az egyenlet általános megoldása tehát $y(x) = x^2e^{-x^2} + Ce^{-x^2}$.

d) Az egyenlet elsőrendű lineáris inhomogén, először a homogén egyenletet oldjuk meg. Ez szétválasztható:

$$\frac{y'}{y} = \tan x + \operatorname{ctg} x.$$

Integráljuk mindkét oldalt, ebből a homogén egyenlet általános megoldása

$$\ln|y_h(x)| = \int\left(\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)\mathrm{d}x = -\ln\cos x + \ln\sin x + C = \ln\tan x + C,$$

vagyis $y_h(x) = C\tan x$.
Az inhomogén egyenlet megoldható az állandók variálásával. $y(x) = c(x)y_h(x)$, ahol

$$c'(x) = \frac{-4\sin^2 x}{\tan x} = -4\sin x\cos x = -2\sin 2x.$$

Ennek az integrálja $c(x) = \cos 2x + C$, tehát az eredeti egyenlet általános megoldása $y(x) = \cos 2x\tan x + C\tan x$.

e) Az egyenlet elsőrendű lineáris inhomogén, a hozzá tartozó homogén egyenlet szétválasztható:

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x},$$

integrálás után az $y_h(x) = Cx$ általános megoldást kapjuk.
Az inhomogén egyenlet megoldását az állandók variálásának módszerével keressük. $y(x) = c(x)x$, a kezdeti feltételből $c(2) = \frac{5}{2}$, az egyenletből pedig $c'(x) = \frac{x^3+1}{x^2}$, tehát

$$c(x) = \frac{5}{2} + \int_2^x \frac{\xi^3+1}{\xi^2}\,\mathrm{d}\xi = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} - \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2}.$$

A kezdetiérték-probléma megoldása $y(x) = -1 + x + \frac{x^3}{2}$.

15. A ^{226}Ra α-bomlása során ^{222}Rn keletkezik, amely szintén radioaktív, felezési ideje 3,824 nap. Ha kezdetben csak rádium van jelen, hogyan alakul időben a radon mennyisége?

Megoldás. Jelölje a rádium bomlásállandóját λ_1, mennyiségét $y_1(x)$, a radonét λ_2 és $y_2(x)$. Ekkor

$$\begin{aligned} y_1' &= -\lambda_1 y_1 \\ y_2' &= -y_1' - \lambda_2 y_2 \end{aligned}$$

Az első egyenlet megoldása $y_1(x) = Ce^{-\lambda_1 x}$, ezt a másodikba helyettesítve az

$$y_2' + \lambda_2 y_2 = C\lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletet kapjuk. A homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-\lambda_2 x}$, az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása

$$C\lambda_1 \frac{e^{-\lambda_1 x}}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

A keresett megoldás $y_2(0) = 0$ alapján

$$y_2(x) = C\lambda_1 \frac{-e^{-\lambda_1 x} + e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$