Matematika A2c gyakorlat

Vegyészmérnöki, Biomérnöki, Környezetmérnöki szakok, 2017/18 ősz

4. feladatsor: Sajátérték és sajátvektor, szétválasztható és elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

---

1. Határozzuk meg a sajátértékeket és sajátvektorokat.
   a) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$
   b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -3 \\ 4 & 2 & -3 \end{bmatrix}$
   c) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
2. Tudjuk, hogy az $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ a & 1 \end{bmatrix}$ mátrix egyik sajátvektora $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg az a paraméter értékét, a sajátértékeket és a másik sajátvektort.
3. Adjuk meg az $y'' = e^{-3x} + 2x$ differenciálegyenlet általános megoldását. Adjuk meg azt a partikuláris megoldást, amely eleget tesz az $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ kezdeti feltételeknek.
4. Adjuk meg az $y' = \frac{x}{y} e^{2x-3y^2}$ $(y \neq 0)$ differenciálegyenlet általános megoldását.
5. Adjuk meg az $y' = \frac{y-2}{xy}$ $(x \neq 0,\ y \neq 0)$ differenciálegyenlet általános megoldását. Oldjuk meg az $y(1) = 2$, $y(1) = 3$, illetve az $y(-1) = -3$ kezdeti feltételek mellett.
6. Oldjuk meg a következő szétválasztható változójú egyenleteket:
   a) $y' = \dfrac{y^2 + 4y + 9}{(x-1)(x+5)}, \quad (x \neq 1,\ x \neq -5)$
   b) $y' = (3x-1)^5 (y^2 - 4y)$
   c) $y' = \dfrac{2y^2 + 3}{y} 2xe^{-4x^2}, \quad (y \neq 0)$
7. A rádium bomlási sebessége arányos a pillanatnyi rádiummennyiséggel. Tudjuk, hogy a rádium (^{226}Ra) felezési ideje 1600 év. A kiindulási anyag mennyiségének hány százaléka bomlik el 100 év alatt?
8. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémát.
   $$y' - \frac{x}{x^2+4} y = 6x, \qquad y(0) = 4$$
9. Adjuk meg az $y' - \dfrac{2}{x} y = x$ differenciálegyenlet általános megoldását. Oldjuk meg az $y(1) = 3$, illetve az $y(-e) = 3e^2$ kezdetiérték-problémákat.
10. Oldjuk meg az alábbi elsőrendű egyenleteket.
    a) $y' - 3x^2 y = 6x^2$
    b) $y' + \dfrac{2}{x} y = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad (x \neq 0)$
    c) $y' + \dfrac{5}{x} y = e^x x^{-4}, \quad (x \neq 0)$
    d) $y' + \dfrac{1}{x} y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{2}, \quad y(1) = 1$

További gyakorló feladatok

11. Határozzuk meg a sajátértékeket és sajátvektorokat.

a) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} -2 & -3 & -4 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & -8 & 0 & 12 \\ 0 & -7 & 0 & 12 \\ 2 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 12 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & -8 \\ 0 & 0 & 16 & 11 \end{bmatrix}$

12. Tudjuk, hogy az $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & a \end{bmatrix}$ mátrix egyik sajátvektora $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Határozzuk meg az a paraméter értékét, a sajátértékeket és a másik sajátvektort.

13. Legyen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Bizonyítsuk be, hogy

$$A^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$$

ahol F a Fibonacci-sorozatot jelöli, amely a $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ és $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ rekurzióval adott. Adjunk ennek segítségével zárt formulát F_n-re.

14. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket illetve kezdetiérték-problémákat:
   a) $(1 + x^2)y' + (1 + y^2) = 0$
   b) $y' = e^{-y} \sin^2 x$, $y(0) = 0$
   c) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$
   d) $y' - (\tan x + \cot x)y = -4 \sin^2 x$
   e) $xy' - y = x^3 + 1$, $y(2) = 5$

15. A ^{226}Ra α-bomlása során ^{222}Rn keletkezik, amely szintén radioaktív, felezési ideje 3,824 nap. Ha kezdetben csak rádium van jelen, hogyan alakul időben a radon mennyisége?