Matematika A2c gyakorlat

Vegyészmérnöki, Biomérnöki, Környezetmérnöki szakok, 2017/18 ősz

5. feladatsor: Helyettesítés, iránymező, magasabbrendű homogén lineáris differenciálegyenletek (megoldás)

---

1. Oldjuk meg új változó bevezetésével az alábbi differenciálegyenleteket.

   a) $y' = \dfrac{2y^2 + x^2}{xy}$

   b) $x^2y' + xy = x^2 + y^2, \quad y(1) = 2$

   c) $y' = \dfrac{1}{x + y}$

   Megoldás.

   a) Az egyenlet explicit alakú, jobb oldala csak $\frac{y}{x}$ függvénye, tehát $u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel visszavezethető szétválasztható egyenletre:

$$u' = \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{x\frac{2y^2+x^2}{xy} - y}{x^2} = \frac{2y^2 + x^2 - y^2}{x^2y}$$
$$= \frac{1}{x}\left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right) = \frac{1}{x}\left(u + \frac{1}{u}\right),$$

   tehát

$$\frac{u'}{u + \frac{1}{u}} = \frac{1}{x}.$$

   Integráljuk mindkét oldalt x szerint:

$$\int \frac{u'}{u + \frac{1}{u}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln(u^2+1) = \ln|x| + C,$$

   amiből

$$u(x) = \pm\sqrt{Cx^2 - 1}, \qquad y(x) = \pm x\sqrt{Cx^2 - 1}.$$

   b) Az egyenletet explicit alakra hozzuk:

$$y' = \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2} = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x},$$

   a jobb oldal $\frac{y}{x}$ függvénye, tehát $u = \frac{y}{x}$ helyettesítést alkalmazunk.

$$u' = \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{1}{x}\left(1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} - \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(1 + u^2 - 2u\right) = \frac{1}{x}(1-u)^2$$

   átrendezve

$$\frac{u'}{(1-u)^2} = \frac{1}{x},$$

   tehát integrálás után

$$\int \frac{u'}{(1-u)^2}\,\mathrm{d}x = \int (1-u)^{-2}\,\mathrm{d}u = (1-u)^{-1} = \ln|x| + C.$$

Ebből y kifejezhető:

$$y(x) = xu(x) = x\left(1 - \frac{1}{\ln|x| + C}\right)$$

A kezdeti feltétel alapján

$$2 = y(1) = 1 - \frac{1}{C},$$

tehát $C = -1$.

c) Az egyenlet explicit, a jobb oldal x és y egy lineáris kombinációjától függ, tehát ezt értemes helyettesíteni: $u = x + y$ bevezetésével

$$u' = 1 + y' = 1 + \frac{1}{x+y} = 1 + \frac{1}{u},$$

azaz

$$\frac{u'}{1+\frac{1}{u}} = 1.$$

Integrálva

$$\int \frac{u'}{1+\frac{1}{u}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{u}{u+1}\,\mathrm{d}u = \int \left(1 - \frac{1}{u+1}\right)\mathrm{d}u = u + \ln|u+1| = x + C.$$

Ebből az $y(x) = u(x) - x$ függvényt nem lehet elemi függvényekkel kifejezni, a megoldás implicit alakban $x + y + \ln|x+y+1| = x + C$.

2. Írjuk fel az $y' = e^{y+2} - x$ differenciálegyenlet izoklínáinak egyenletét, és rajzoljunk fel kettőt. Van-e lokális szélsőértéke a $P_0 = (e, -1)$ ponton áthaladó megoldásnak a P_0 pontban?

Megoldás. Az izoklínák egyenlete $e^{y+2} - x = m$, ahol $m \in \mathbb{R}$ paraméter. y értékét kifejezve $y = \ln(x+m) - 2$, tehát a logaritmusfüggvény grafikonját balra m, lefelé 2 egységgel kell eltolni.
A $P_0 = (e, -1)$ ponton áthaladó integrálgörbe P_0 pontbeli deriváltja $y'(e) = e^{y(e)+2} - e = e^{-1+2} - e = 0$. A második derivált a differenciálegyenlet mindkét oldalának deriválásával határozható meg: $y'' = e^{y+2}y' - 1$, tehát a vizsgált megoldás második deriváltja a P_0 pontban

$$y''(e) = e^{y(e)+2}y'(e) - 1 = -1,$$

tehát ebben a pontban lokális maximum van.

3. Tekintsük az $y' = (y^2 - 4)x + x - 1$ differenciálegyenletet.

a) A sík mely pontjaiban párhuzamos az iránymező az $y = -x$ egyenessel? Vázoljuk ezeket a pontokat és jelöljünk be néhány vonalelemet.

b) Van-e lokális szélsőértéke vagy inflexiós pontja az $(1, 2)$ ponton átmenő megoldásnak ebben a pontban?

Megoldás.

a) Az $y = -x$ egyenes meredeksége -1, tehát azokat a pontokat keressük, ahol az egyenlet jobb oldala -1. Az így kapott egyenletet átrendezve $(y^2 - 3)x = 0$ adódik, tehát az y tengely és az $y = \pm\sqrt{3}$ egyenesek pontjai adják a megoldást.

b) Az $y(1) = 2$ kezdeti feltételnek eleget tevő megoldás deriváltja ebben a pontban $y'(1) = (y(1)^2 - 4)\cdot 1 + 1 - 1 = 0$. A második derivált $y'' = (xy(x)^2 - 3x - 1) = y(x)^2 + 2xy(x)y'(x) - 3 = 2^2 + 2\cdot 1\cdot 2\cdot 0 - 3 = 1$, tehát lokális minimum van ebben a pontban.

4. Oldjuk meg az alábbi homogén lineáris állandó együtthatós egyenleteket.
   a) $y'' - 8y' + 15y = 0$
   b) $y'' - 8y' + 16y = 0$
   c) $y'' + 4y' + 13y = 0$
   d) $y''' + 2y'' + y' = 0$
   e) $y''' + 4y'' + 13y' = 0$
   f) $y^{(4)} - y = 0$

   Megoldás.
   a) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda - 3)(\lambda - 5)$, a gyökök 3 és 5, mindkettő egyszeres. Az általános megoldás $y(x) = Ae^{3x} + Be^{5x}$.
   b) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2$, a 4 kétszeres gyök, tehát az általános megoldás $y(x) = Ae^{4x} + Bxe^{4x}$.
   c) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 4\lambda + 13$, ennek gyökei

$$\lambda_\pm = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 13}}{2} = -2 \pm 3i$$

   Az általános megoldás $y(x) = Ae^{-2x}\cos(3x) + Be^{-2x}\sin(3x)$.
   d) A karakterisztikus polinom $\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = \lambda(\lambda + 1)^2$, ennek 0 egyszeres, -1 kétszeres gyöke, tehát az általános megoldás $y(x) = A + Be^{-x} + Cxe^{-x}$.
   e) A karakterisztikus polinom $\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = \lambda(\lambda^2 + 4\lambda + 13)$, ennek gyökei 0, $-2 \pm 3i$, mindegyik egyszeres. Az általános megoldás $y(x) = A + Be^{-2x}\cos(3x) + Ce^{-2x}\sin(3x)$.
   f) A karakterisztikus polinom $\lambda^4 - 1 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i)$, a gyökök $1, i, -1, i$, mindegyik egyszeres. Az általános megoldás $y(x) = Ae^x + Be^{-x} + C\cos x + D\sin x$.

5. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémákat.
   a) $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$
   b) $y'' + 10y' + 25y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 7$

   Megoldás.
   a) Az egyenlet karakterisztikus polinomja $\lambda^2 + 2\lambda + 2$, ennek gyökei $-1 \pm i$ (egyszeresek). Az általános megoldás és deriváltja

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x & y(0) &= A \\ y'(x) &= -Ae^{-x}\cos x - Ae^{-x}\sin x - Be^{-x}\sin x + Be^{-x}\cos x & y'(0) &= -A + B. \end{aligned}$$

   A kezdeti feltétel alapján $A = 2$, $-A + B = 1$, vagyis $B = 3$.
   b) Az egyenlet karakterisztikus polinomja $\lambda^2 + 10\lambda + 25 = (\lambda + 5)^2$, tehát az általános megoldás és deriváltja

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{-5x} + Bxe^{-5x} & y(0) &= A \\ y'(x) &= -5Ae^{-5x} + Be^{-5x} - 5Bxe^{-5x} & y'(0) &= -5A + B. \end{aligned}$$

   A kezdeti feltétel alapján $A = -1$, $-5A + B = 7$, vagyis $B = 2$.

További gyakorló feladatok

6. Oldjuk meg új változó bevezetésével az $xy' = y(1 + \ln y - \ln x)$ differenciálegyenletet.

Megoldás. Az egyenlet explicit alakja

$$y' = \frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x) = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\frac{y}{x}\right),$$

a jobb oldal $\frac{y}{x}$ függvénye, tehát $u = \frac{y}{x}$ helyettesítés célszerű. Ezzel az egyenlet

$$u' = \frac{1}{x}\left(y' - \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x} - \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x}\left(u \ln u\right),$$

ami szétválasztható, ennek megfelelően rendezzük át:

$$\frac{u'}{u\ln u} = \frac{1}{x}.$$

Integráljuk mindkét oldalt x szerint:

$$\int \frac{u'}{u \ln u}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u}(\ln u)^{-1}\,\mathrm{d}u = \ln|\ln u| = \ln|x| + C,$$

tehát $y(x) = xe^{Cx}$.

7. Oldjuk meg az alábbi homogén lineáris állandó együtthatós egyenleteket.
   a) $y'' + 2y' = 0$
   b) $y'' + 25y = 0$
   c) $y^{(4)} - y^{(3)} = 0$
   d) $y^{(4)} - y' = 0$

   Megoldás.
   a) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda + 2)$, tehát 0 és -2 egyszeres gyökök. Az általános megoldás $y(x) = A + Be^{-2x}$.
   b) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 25$, ennek gyökei $\pm 5i$ (egyszeres gyökök). Az általános megoldás $y(x) = A\cos 5x + B\sin 5x$.
   c) A karakterisztikus polinom $\lambda^4 - \lambda^3 = \lambda^3(\lambda - 1)$, ennek gyökei 0 (háromszoros) és 1 (egyszeres). Az általános megoldás $y(x) = A + Bx + Cx^2 + De^x$.
   d) A karakterisztikus polinom $\lambda^4 - \lambda = \lambda(\lambda^3 - 1)$, ennek gyökei 0, 1, $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (egyszeres gyökök). Az általános megoldás $y(x) = A + Be^x + Ce^{-\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + De^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$.

8. Oldjuk meg az alábbi kezdetiérték-problémákat.
   a) $y'' + 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = -4$
   b) $y'' + 4y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$

   Megoldás.
   a) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda + 4)(\lambda - 1)$, a gyökök -4 és 1, mindkettő egyszeres. Az általános megoldás és deriváltja

   $$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{-4x} + Be^x & \qquad y(0) &= A + B \\ y'(x) &= -4Ae^{-4x} + Be^x & \qquad y'(0) &= -4A + B, \end{aligned}$$

   a kezdeti feltétel alapján $A + B = 3$, $-4A + B = -4$, az egyenletrendszer megoldása $A = -\frac{7}{5}$, $B = \frac{8}{5}$.
   b) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 4$, ennek gyökei $\pm 2i$, mindkettő egyszeres. Az általános megoldás és deriváltja

   $$\begin{aligned} y(x) &= A\cos 2x + B\sin 2x & \qquad y(0) &= A \\ y(x) &= -2A\sin 2x + 2B\cos 2x & \qquad y(0) &= 2B, \end{aligned}$$

   a kezdeti feltétel alapján $A = 0$, $2B = 4$, tehát $B = 2$.

9. Legyenek $\omega \geq 0$ és $\alpha \geq 0$ valós paraméterek. Oldjuk meg az $y'' + 2\alpha y' + \omega^2 y = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett. Miben különbözik a megoldás $\alpha > \omega$ és $\alpha < \omega$ esetén?

   Megoldás. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega^2\lambda$, ennek gyökei

$$\frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\omega^2}}{2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}.$$

   Ha $\alpha > \omega$, akkor mindkét gyök valós (negatív), az általános megoldás

$$y(x) = Ae^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega^2})x} + Be^{(-\alpha-\sqrt{\alpha^2-\omega^2})x}.$$

   A kezdeti feltételből kell A és B értékét meghatározni:

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = A + B \\ 0 &= y'(0) = (-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2})A + (-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2})B, \end{aligned}$$

   ebből

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}}{2\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}} \\ B &= \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}}{2\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}}. \end{aligned}$$

   A kapott megoldás monoton csökken, exponenciálisan 0-hoz tart ($y(x) \leq Ce^{(-\alpha+\sqrt{\alpha^2-\omega^2})x}$).
   Ha $\alpha < \omega$, akkor viszont komplex gyököket kapunk, az általános megoldás

$$y(x) = Ae^{-\alpha x}\cos(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}x) + Be^{-\alpha x}\sin(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}x).$$

   A kezdeti feltételből kell A és B értékét meghatározni:

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = A \\ 0 &= y'(0) = -\alpha A + \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}B, \end{aligned}$$

   ebből

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= \frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}. \end{aligned}$$

   Ilyenkor a megoldás a 0 körül oszcillál. Ha $\alpha > 0$, akkor exponenciálisan 0-hoz tart ($|y(x)| \leq Ce^{-\alpha x}$), ha viszont $\alpha = 0$, akkor periodikus.
   Meg kell még vizsgálni az $\alpha = \omega$ esetet. Ekkor $-\alpha$ kétszeres valós gyök, az általános megoldás $y(x) = Ae^{-\alpha x} + Bxe^{-\alpha x}$. A kezdeti feltételből kell A és B értékét meghatározni:

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = A \\ 0 &= y'(0) = -\alpha A + B, \end{aligned}$$

   ebből $A = 1$ és $B = \alpha$. Ekkor a megoldás szigorúan monoton csökken, szintén exponenciálisan 0-hoz tart, de kicsivel lassabban mint $e^{-\alpha x}$ ($|y(x)| \leq Cxe^{-\alpha x}$). Ezt a megoldást az előző két eset bármelyikéből megkaphattuk volna $\omega \to \alpha$ határátmenettel.