Matematika A2c gyakorlat

Vegyészmérnöki, Biomérnöki, Környezetmérnöki szakok, 2017/18 ősz

6. feladatsor: Inhomogén lineáris differenciálegyenletek (megoldás)

---

1. Írjunk fel egy olyan legalacsonyabbrendű valós, állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletet, melynek megoldásai az alábbi függvények. Írjuk fel az egyenlet általános megoldását is.
   a) $2e^{5x} - e^{-3x}$
   b) $6x^2 + 5e^{2x}$
   c) $7x,\ \sin 5x$
   d) $3x^2e^{2x},\ e^{3x}$
   e) $6 + e^{3x}\sin x$

   Megoldás. A megadott függvények $p(x)e^{\alpha x}$ alakú tagok összegei, ahol p polinom (lehet konstans is). Az állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletek megoldásánál láthattuk, hogy egy ilyen függvény akkor megoldás, ha minden tagja megoldás, aminek az feltétele, hogy α a karakterisztikus polinom gyöke legyen legalább $(\deg p) + 1$ multiplicitással. A rend akkor lesz a legalacsonyabb, ha pontosan ezek a gyökök és pontosan ekkora a multiplicitás.
   a) 5 és -3 egyszeres gyökök: $y'' - 2y' - 15y = 0$, az általános megoldás $Ae^{5x} + Be^{-3x}$.
   b) 0 háromszoros, 2 egyszeres gyök: $y'''' - 2y''' = 0$, az általános megoldás $A + Bx + Cx^2 + De^{2x}$.
   c) 0 kétszeres, $\pm 5i$ egyszeres gyökök: $y'''' + 25y'' = 0$, az általános megoldás $A + Bx + C\cos 5x + D\sin 5x$.
   d) 2 háromszoros, 3 egyszeres gyök: $y'''' - 9y''' + 30y'' - 44y' + 24y = 0$, az általános megoldás $(A + Bx + Cx^2)e^{2x} + De^{3x}$.
   e) 0 egyszeres, $3 \pm i$ egyszeres gyökök: $y''' - 6y'' + 10y' = 0$, az általános megoldás $A + Be^{3x}\cos x + Ce^{3x}\sin x$.

2. Oldjuk meg a következő inhomogén lineáris, állandó együtthatós egyenleteket.
   a) $y'' - 5y' + 6y = 2\sin 2x$
   b) $y'' - 5y' + 6y = 2xe^x$
   c) $y'' - 6y' + 13y = 39$
   d) $y'' - y' - 2y = 3e^{2x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$
   e) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x} + 4x^2 - 6$
   f) $y'' - 3y' + 2y = x + e^x$
   g) $y'' - 2y' + y = 6e^x$
   h) $y'' + 8y' + 25y = e^{-4x}$
   i) $y'' + 2y' = 2x + 3$
   j) $y'' + y = \sin x$

   Megoldás.
   a) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{2x} + Be^{3x}$. Nincs külső rezonancia, így az inhomogén egyenlet megoldását $y(x) = C\cos 2x + D\sin 2x$ alakban keressük. Az egyenletbe helyettesítve

$$-4C\cos 2x - 4D\sin 2x - 10C\sin 2x + 10D\cos 2x + 6C\cos 2x + 6D\sin 2x = 2\sin 2x,$$

tehát

$$\begin{aligned}2C-10D&=0\\10C+2D&=2.\end{aligned}$$

Ennek megoldása $C=\frac{5}{26}$, $D=\frac{1}{26}$, tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x)=\frac{5}{26}\cos 2x+\frac{1}{26}\sin 2x+Ae^{2x}+Be^{3x}.$$

b) A karakterisztikus polinom $\lambda^2-5\lambda+6=(\lambda-2)(\lambda-3)$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{2x}+Be^{3x}$. Nincs külső rezonancia, így az inhomogén egyenlet megoldását $y(x)=(C_1+C_2x)e^x$ alakban keressük. Az egyenletbe helyettesítve

$$(C_1+2C_2+C_2x)e^x-5(C_1+C_2+C_2x)e^x+6(C_1+C_2x)e^x=2xe^x,$$

tehát

$$\begin{aligned}2C_1-3C_2&=0\\2C_2&=2.\end{aligned}$$

Ebből $C_2=1$, $C_1=\frac{3}{2}$, tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$\frac{3}{2}e^x+xe^x+Ae^{2x}+Be^{3x}.$$

c) A karakterisztikus polinom $\lambda^2-6\lambda+13=(\lambda-(3+2i))(\lambda-(3-2i))$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{3x}\cos 2x+Be^{3x}\sin 2x$. Nincs külső rezonancia, így az inhomogén egyenlet megoldását $y(x)=C$ alakban keressük. Az egyenletbe helyettesítve $13C=39$, vagyis $C=3$ adódik, az inhomogén egyenlet általános megoldása így

$$y(x)=3+Ae^{3x}\cos 2x+Be^{3x}\sin 2x.$$

d) A karakterisztikus polinom $\lambda^2-\lambda-2=(\lambda+1)(\lambda-2)$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-x}+Be^{2x}$. Külső rezonancia van, így az inhomogén egyenlet megoldását $y(x)=Cxe^{2x}$ alakban keressük. Az egyenletbe helyettesítve

$$4Ce^{2x}+4Cxe^{2x}-(Ce^{2x}+2Cxe^{2x})-2Cxe^{2x}=3e^{2x},$$

tehát $3C=3$, vagyis $C=1$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása és annak deriváltja

$$\begin{aligned}y(x)&=xe^{2x}+Ae^{-x}+Be^{2x}\\y'(x)&=e^{2x}+2xe^{2x}-Ae^{-x}+2Be^{2x},\end{aligned}$$

A kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned}3&=y(0)=A+B\\1&=y'(0)=1-A+2B,\end{aligned}$$

amiből $A=2$, $B=1$. A kezdetiérték-feladat megoldása tehát

$$y(x)=xe^{2x}+2e^{-x}+e^{2x}.$$

e) A karakterisztikus polinom $\lambda^2-3\lambda+2\lambda=(\lambda-1)(\lambda-2)$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása Ae^x+Be^{2x}. Nincs külső rezonancia, az inhomogén egyenlet megoldását $y(x)=Ce^{3x}+(D_0+D_1x+D_2x^2)$ alakban keressük. Az egyenletbe behelyettesítve

$$9Ce^{3x}+2D_2-3(3C_1e^{3x}+D_1+2D_2x)+2(Ce^{3x}+D_0+D_1x+D_2x^2)=e^{3x}+4x^2-6$$

adódik, tehát

$$\begin{aligned} 2D_0-3D_1+2D_2&=-6\\ 2D_1-6D_2&=0\\ 2D_2&=4\\ 2C&=1. \end{aligned}$$

Ebből $C=\frac{1}{2}$, $D_0=4$, $D_1=6$, $D_2=2$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x)=\frac{1}{2}e^{3x}+4+6x+2x^2+Ae^x+Be^{2x}.$$

f) A karakterisztikus polinom $\lambda^2-3\lambda+2\lambda=(\lambda-1)(\lambda-2)$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása Ae^x+Be^{2x}. Az e^x tag miatt külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet megoldását $y(x)=C_0+C_1x+Dxe^x$ alakban keressük. Az egyenletbe behelyettesítve

$$2De^x+Dxe^x-3(C_1+De^x+Dxe^x)+2(C_0+C_1x+Dxe^x)=x+e^x$$

adódik, tehát

$$\begin{aligned} 2C_0-3C_1&=0\\ 2C_1&=1\\ -D&=1, \end{aligned}$$

amiből $C_0=\frac{3}{4}$, $C_1=\frac{1}{2}$, $D=-1$, tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x)=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}x-xe^x+Ae^x+Be^{2x}.$$

g) A karakterisztikus polinom $\lambda^2-2\lambda+1=(\lambda-1)^2$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása Ae^x+Bxe^x (belső rezonancia). Az inhomogén tag kitevőjében x együtthatója szintén 1, tehát külső rezonancia is van, az inhomogén egyenlet megoldását Cx^2e^x alakban keressük. Behelyettesítés után az egyenlet

$$2Ce^x+4Cxe^x+Cx^2e^x-2(2Cxe^x+Cx^2e^x)+Cx^2e^x=6e^x,$$

azaz $2C=6$, amiből $C=3$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x)=3x^2e^x+Ae^x+Bxe^x.$$

h) A karakterisztikus polinom $\lambda^2+8\lambda+25$, ennek gyökei $-4\pm3i$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-4x}\cos 3x+Be^{-4x}\sin 3x$. Nincs külső rezonancia, az inhomogén egyenlet megoldását Ce^{-4x} alakban keressük. Behelyettesítve

$$16Ce^{-4x}+8\cdot(-4)Ce^{-4x}+25Ce^{-4x}=e^{-4x}$$

adódik, vagyis $9C=1$, tehát $C=\frac{1}{9}$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x)=\frac{1}{9}e^{-4x}+Ae^{-4x}\cos 3x+Be^{-4x}\sin 3x.$$

i) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 2\lambda = \lambda(\lambda + 2)$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $A + Be^{-2x}$. Külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet megoldását $y(x) = (C_0 + C_1 x)x$ alakban keressük. Ezt behelyettesítve a

$$2C_1 + 2(C_0 + 2C_1 x) = 2x + 3$$

egyenletet kapjuk, amiből

$$\begin{aligned} 2C_1 + 2C_0 &= 3 \\ 4C_1 &= 2. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszerből $C_0 = 1$, $C_1 = \frac{1}{2}$, az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = x + \frac{1}{2}x^2 + A + Be^{-2x}.$$

j) $y'' + y = \sin x$ A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 1$, ennek gyökei ± 1, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $A \cos x + B \sin x$. Külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet megoldását $Cx \cos x + Dx \sin x$ alakban keressük. Ezt behelyettesítve az egyenlet

$$-2C \sin x - Cx \cos x + 2D \cos x - Dx \sin x + Cx \cos x + Dx \sin x = \sin x,$$

azaz a feltétel $2D = 0$, $-2C = 1$. Ebből $C = -\frac{1}{2}$, $D = 0$, így az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = -\frac{1}{2}x \cos x + A \cos x + B \sin x.$$

3. Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket.
   a) $y^{(4)} - 8y''' + 16y'' = 2x - 9$
   b) $y'' + y = 2 \sin x \cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$
   c) $y''' - 2y'' - y' + 2y = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$

   Megoldás.

   a) A karakterisztikus polinom $\lambda^4 - 8\lambda^3 + 16\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 4)^2$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $A + Bx + Ce^{4x} + Dxe^{4x}$ (belső rezonancia). Külső rezonancia is van, az inhomogén egyenlet megoldását $(C_0 + C_1 x)x^2$ alakban keressük. Ezt behelyettesítve az egyenlet

$$-8 \cdot 6C_1 + 16(2C_0 + 6C_1 x) = 2x - 9,$$

amiből

$$\begin{aligned} 32C_0 - 48C_1 &= -9 \\ 96C_1 &= 2, \end{aligned}$$

tehát $C_0 = -\frac{1}{4}$, $C_1 = \frac{1}{48}$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^3 + A + Bx + Ce^{4x} + Dxe^{4x}.$$

   b) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 1$, ennek gyökei $\pm i$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $A \cos x + B \sin x$. Az inhomogén tag $2 \sin x \cos x = \sin 2x$, tehát nincs külső rezonancia, az inhomogén egyenlet megoldását $C\cos 2x + D\sin 2x$ alakban keressük. Behelyettesítve

$$-4C\cos 2x - 4D\sin 2x + C\cos 2x + D\sin 2x = \sin 2x,$$

amiből $C = 0$, $D = -\frac{1}{3}$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása és annak deriváltja

$$\begin{aligned} y(x) &= -\frac{1}{3}\sin 2x + A\cos x + B\sin x \\ y'(x) &= -\frac{2}{3}\cos 2x - A\sin x + B\cos x. \end{aligned}$$

A kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = A \\ 1 &= y'(0) = -\frac{2}{3} + B, \end{aligned}$$

tehát $A = 1$, $B = \frac{5}{3}$. A kezdetiérték-probléma megoldása

$$y(x) = -\frac{1}{3}\sin 2x + \cos x + \frac{5}{3}\sin x.$$

c) y$'''-2y''-y'+2y = \frac{1}{2}e^{2x}+\frac{1}{2}e^{-2x}$ A karakterisztikus polinom $\lambda^3-2\lambda^2-\lambda+2 = (\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-x} + Be^{x} + Ce^{2x}$. Külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet megoldását $y(x) = Cxe^{2x}+De^{-2x}$ alakban keressük. A behelyettesítés után kapott egyenlet

$$\begin{aligned} &12Ce^{2x} + 8Cxe^{2x} - 8De^{-2x} - 2(4Ce^{2x} + 4Cxe^{2x} + 4De^{-2x}) \\ &\qquad - (Ce^{2x} + 2Cxe^{2x} - 2De^{-2x}) + 2(Cxe^{2x} + De^{-2x}) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}, \end{aligned}$$

azaz $-12D = \frac{1}{2}$, $3C = \frac{1}{2}$, amiből $C = \frac{1}{6}$, $D = -\frac{1}{24}$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = \frac{1}{6}xe^{2x} - \frac{1}{24}e^{-2x} + Ae^{-x} + Be^{x} + Ce^{2x}.$$

További gyakorló feladatok

4. Oldjuk meg a következő lineáris, állandó együtthatós egyenleteket.
   a) $y'' + 2y' - 3y = e^x$
   b) $y'' + 2y' + 2y = e^x$
   c) $y'' + 2y' + y = e^x$
   d) $y'' + 2y' + y = \cosh x$
   e) $y'' + 2y' + y = x\cosh x$
   f) $y^{(4)} + 5y'' - 36y = 0$
   g) $y^{(4)} + 6y'' + 25y = 0$
   h) $y'' + y' - 6y = x^2e^{-3x}$
   i) $y'' + y' - 6y = xe^{2x}$
   j) $y'' + y' - 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
   k) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$
   l) $y''' + 3y'' + 3y' + y = xe^{-x}$

Megoldás.

a) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda - 1)(\lambda + 3)$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $Ae^x + Be^{-3x}$. Külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet megoldását Cxe^x alakban keressük. Behelyettesítve

$$2Ce^x + Cxe^x + 2(Ce^x + Cxe^x) - 3Cxe^x = e^x,$$

azaz $4C = 1$, $C = \frac{1}{4}$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = \frac{1}{4}xe^x + Ae^x + Be^{-3x}.$$

b) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 2\lambda + 2$, ennek gyökei $-1 \pm i$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x$. Nincs külső rezonancia, az inhomogén egyenlet megoldását Ce^x alakban keressük. Behelyettesítve

$$Ce^x + 2Ce^x + 2Ce^x = e^x,$$

azaz $C = \frac{1}{5}$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = \frac{1}{5}e^x + Ae^{-x}\cos x + Be^{-x}\sin x.$$

c) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-x} + Bxe^{-x}$ (belső rezonancia). Nincs külső rezonancia, az inhomogén egyenlet megoldását Ce^x alakban keressük. Behelyettesítve

$$Ce^x + 2Ce^x + Ce^x = e^x,$$

amiből $C = \frac{1}{4}$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = \frac{1}{4}e^x + Ae^{-x} + Bxe^{-x}.$$

d) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-x} + Bxe^{-x}$ (belső rezonancia). Az inhomogén tag $\frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$ alakba írható, a második tag miatt külső rezonancia is van, így az inhomogén egyenlet megoldását $Ce^x + Dx^2e^{-x}$ alakban keressük. Behelyettesítve az egyenlet

$$\begin{aligned} &Ce^x + Dx^2e^{-x} - 4Dxe^{-x} + 2De^{-x} \\ &\qquad + 2(Ce^x + 2Dxe^{-x} - Dx^2e^{-x}) + Ce^x + Dx^2e^{-x} = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}, \end{aligned}$$

azaz

$$4Ce^x + 2De^{-x} = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$$

alakú lesz, amiből $C = \frac{1}{8}$, $D = \frac{1}{4}$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = \frac{1}{8}e^x + \frac{1}{4}x^2e^{-x} + Ae^{-x} + Bxe^{-x}.$$

e) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-x} + Bxe^{-x}$ (belső rezonancia). Az inhomogén tag $\frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}xe^{-x}$, a második tag miatt külső rezonancia is van, az inhomogén egyenlet megoldását $(C_0 + C_1x)e^x +$

$(D_0 + D_1x)x^2e^{-x}$ alakban keressük. Behelyettesítés és a zárójel felbontása után az egyenlet

$$4C_0e^x + 4C_1e^x + 4C_1xe^x + 2D_0e^{-x} + 6D_1xe^{-x} = \frac{1}{2}xe^x + \frac{1}{2}xe^{-x},$$

amiből a

$$\begin{aligned} 4C_0 + 4C_1 &= 0 \\ 4C_1 &= \frac{1}{2} \\ 2D_0 &= 0 \\ 6D_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

egyenletrendszer adódik. Ennek megoldása $C_0 = -\frac{1}{8}$, $C_1 = \frac{1}{8}$, $D_0 = 0$, $D_1 = \frac{1}{12}$, tehát az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = -\frac{1}{8}e^x + \frac{1}{8}xe^x + \frac{1}{12}x^3e^{-x} + Ae^{-x} + Bxe^{-x}.$$

f) Az egyenlet homogén, a karakterisztikus polinom $\lambda^4 + 5\lambda^2 - 36$, ami λ^2-ben másodfokú. Akkor 0 az értéke, ha $\lambda^2 = 4$ vagy $\lambda^2 = -9$, tehát a gyökök ± 2 és $\pm 3i$. Az egyenlet általános megoldása

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{-2x} + C\cos 3x + D\sin 3x.$$

g) Az egyenlet homogén, a karakterisztikus polinom $\lambda^4 + 6\lambda^2 + 25$, ami akkor 0, ha $\lambda^2 = -3 \pm 4i$, azaz $\lambda = \pm(1 + 2i)$ és $\lambda = \pm(1 - 2i)$. Az egyenlet általános megoldása

$$y(x) = Ae^x\cos 2x + Be^x\sin 2x + Ce^{-x}\cos 2x + De^{-x}\sin 2x.$$

h) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{2x} + Be^{-3x}$. Külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet megoldását $(C_0 + C_1x + C_2x^2)xe^{-3x}$ alakban keressük. Behelyettesítés és a zárójelek felbontása után az egyenlet

$$-5C_0e^{-3x} + 2C_1e^{-3x} - 10C_1xe^{-3x} + 6C_2xe^{-3x} - 15C_2x^2e^{-3x} = x^2e^{-3x},$$

azaz

$$\begin{aligned} -5C_0 + 2C_1 &= 0 \\ -10C_1 + 6C_2 &= 0 \\ -15C_2 &= 1. \end{aligned}$$

Ebből $C_0 = -\frac{2}{125}$, $C_1 = -\frac{1}{25}$, $C_2 = -\frac{1}{15}$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = (-\frac{2}{125} - \frac{1}{25}x - \frac{1}{15}x^2)xe^{-3x} + Ae^{2x} + Be^{-3x}.$$

i) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{2x} + Be^{-3x}$. Külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet megoldását $(C_0 + C_1x)xe^{2x}$ alakban keressük. Behelyettesítés és a zárójelek felbontása után az egyenlet

$$5C_0e^{2x} + 2C_1e^{2x} + 10C_1xe^{2x} = xe^{2x},$$

azaz

$$\begin{aligned} 5C_0 + 2C_1 &= 0 \\ 10C_1 &= 1. \end{aligned}$$

Ebből $C_0 = -\frac{1}{25}$, $C_1 = \frac{1}{10}$, így az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = -\frac{1}{25}xe^{2x} + \frac{1}{10}x^2e^{2x} + Ae^{2x} + Be^{-3x}.$$

j) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3)$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása és annak deriváltja

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{2x} + Be^{-3x} \\ y'(x) &= 2Ae^{2x} - 3Be^{-3x}. \end{aligned}$$

A kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = A + B \\ 0 &= y'(0) = 2A - 3B, \end{aligned}$$

amiből $A = \frac{3}{5}$, $B = \frac{2}{5}$. Tehát a kezdetiérték-probléma megoldása

$$y(x) = \frac{3}{5}e^{2x} + \frac{2}{5}e^{-3x}.$$

k) A karakterisztikus polinom $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3$, tehát -1 háromszoros gyök (belső rezonancia). Az egyenlet általános megoldása és annak deriváltjai

$$\begin{aligned} y(x) &= Ae^{-x} + Bxe^{-x} + Cx^2e^{-x} \\ y'(x) &= -Ae^{-x} + Be^{-x} - Bxe^{-x} + 2Cxe^{-x} + Cx^2e^{-x} \\ y''(x) &= Ae^{-x} - 2Be^{-x} + Bxe^{-x} + 2Ce^{-x} - 4Cxe^{-x} + Cx^2e^{-x}. \end{aligned}$$

A kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = A \\ 0 &= y'(0) = -A + B \\ 0 &= y''(0) = A - 2B + 2C, \end{aligned}$$

tehát $A = 1$, $B = 1$, $C = \frac{1}{2}$. A kezdetiérték-probléma megoldása

$$y(x) = e^{-x} + xe^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}.$$

l) $y''' + 3y'' + 3y' + y = xe^{-x}$ A karakterisztikus polinom $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3$, tehát -1 háromszoros gyök (belső rezonancia). Az egyenlet általános megoldása $Ae^{-x}+Bxe^{-x}+Cx^2e^{-x}$. Külső rezonancia is van, így az inhomogén egyenlet megoldását $(C_0 + C_1x)x^3e^{-x}$ alakban keressük. Behelyettesítés után az egyenlet

$$6C_0e^{-x} + 24C_1xe^{-x} = xe^{-x},$$

amiből $C_0 = 0$, $C_1 = \frac{1}{24}$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása

$$y(x) = \frac{1}{24}x^4e^{-x} + Ae^{-x} + Bxe^{-x} + Cx^2e^{-x}.$$