Matematika A2c gyakorlat

Vegyészmérnöki, Biomérnöki, Környezetmérnöki szakok, 2017/18 ősz

7. feladatsor: Laplace-transzformáció (megoldás)

---

1. A definíció alapján számoljuk ki a következő függvények Laplace-transzformáltját.

 a) $a(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t = 11 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

 b) $b(t) = \begin{cases} 3 & \text{ha } t \in [11, 12] \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$

 c) $c(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t > 11 \\ 0 & \text{ha } t \leq 11 \end{cases}$

 d) $d(t) = \begin{cases} t - 11 & \text{ha } t > 11 \\ 0 & \text{ha } t \leq 11 \end{cases}$

 Megoldás.

 a) A függvény csak egy pontban tér el az azonosan nulla függvénytől, ez a definícióban szereplő integrál értékét nem változtatja meg, így $(\mathcal{L}a)(z) = 0$.

 b)

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}b)(z) &= \int_0^\infty b(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t \\ &= 3\int_{11}^{12} e^{-zt}\,\mathrm{d}t \\ &= 3\left[\frac{e^{-zt}}{-z}\right]_{11}^{12} \\ &= 3\frac{e^{-11z} - e^{-12z}}{z}\end{aligned}$$

 ha $z \neq 0$, $(\mathcal{L}b)(0) = 3$.

 c)

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}c)(z) &= \int_0^\infty c(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{11}^{\infty} e^{-zt}\,\mathrm{d}t \\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-zt}}{-z}\right]_{11}^{b} \\ &= \frac{e^{-11z}}{z}\end{aligned}$$

 ha $\operatorname{Re} z > 0$.

d)

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}c)(z) &= \int_0^\infty c(t)e^{-zt}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{11}^\infty (t-11)e^{-zt}\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\left[(t-11)\frac{e^{-zt}}{-z}\right]_{11}^{b} - \int_{11}^{b}\frac{e^{-zt}}{-z}\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{e^{-zt}}{-z^2}\right]_{11}^{b} \\
&= \frac{e^{-11z}}{z^2}
\end{aligned}$$

ha $\operatorname{Re} z > 0$.

2. Keressük meg a következő függvények Laplace-transzformáltját.
   a) $7\sin 3t$
   b) $6t^2 + 3t - 2$
   c) $t\cos 7t$
   d) $e^{2t}\sin 3t$

   Megoldás.
   a) $7\cdot\dfrac{3}{z^2+3^2} = \dfrac{21}{z^2+9}$
   b) $6\cdot\dfrac{2}{z^3} + 3\cdot\dfrac{1}{z^2} - 2\cdot\dfrac{1}{z} = \dfrac{12}{z^3} + \dfrac{3}{z^2} - \dfrac{2}{z}$
   c) $-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\dfrac{z}{z^2+7^2}\right) = \dfrac{z^2-49}{(z^2+49)^2}$
   d) $\dfrac{3}{(z-2)^2+3^2} = \dfrac{3}{z^2-4z+13}$

3. Határozzuk meg a következő függvények inverz Laplace-transzformáltját.
   a) $\dfrac{3}{z} + \dfrac{1}{z-5} - \dfrac{7}{z-2}$
   b) $\dfrac{11}{z-3} + \dfrac{4}{z^2-25}$
   c) $\dfrac{7}{z^2+4}$
   d) $\dfrac{z+4}{z^2+9}$
   e) $\dfrac{3}{z^2+4z+14}$
   f) $\dfrac{4}{z^2+2z}$
   g) $\dfrac{3}{z^3+2z^2}$

   Megoldás.
   a) $3 + e^{5t} - 7e^{2t}$
   b) $\dfrac{11}{z-3} + \dfrac{4}{z^2-25} = 11\dfrac{1}{z-3} + \dfrac{4}{5}\dfrac{5}{z^2-5^2}$, $11e^{3t} + \dfrac{4}{5}\sin 5t$
   c) $\dfrac{7}{z^2+4} = \dfrac{7}{2}\dfrac{2}{z^2+2^2}$, $\dfrac{7}{2}\sin 2t$
   d) $\dfrac{z+4}{z^2+9} = \dfrac{z}{z^2+9} + \dfrac{4}{3}\dfrac{3}{z^2+3^2}$, $\cos 3t + \dfrac{4}{3}\sin 3t$

e) $\dfrac{3}{z^2+4z+14}=\dfrac{3}{(z+2)^2+10}$, $\dfrac{3}{\sqrt{10}}e^{-2t}\sin\sqrt{10}t$

f) $\dfrac{4}{z^2+2z}=\dfrac{2}{z}-\dfrac{2}{z+2}$, $2-2e^{-2t}$

g) $\dfrac{3}{z^3+2z^2}=\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{z^2}-\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{z}+\dfrac{3}{4}\dfrac{1}{z+2}$, $\dfrac{3}{2}t-\dfrac{3}{4}+\dfrac{3}{4}e^{-2t}$

4. Oldjuk meg a következő differenciálegyenleteket. (Segítség: vegyük mindkét oldal Laplace-transzformáltját, oldjuk meg az így kapott algebrai egyenletet, majd a megoldásnak keressük meg az inverz Laplace-transzformáltját.)

a) $y'=y$, $y(0)=3$

b) $y''=-y$, $y(0)=0$, $y'(0)=-2$

c) $y'+7y=6$, $y(0)=0$

d) $y''+3y'+2y=e^{-t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$

e) $y''+2y'+5y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$

Megoldás.

a) Legyen $Y=\mathcal{L}y$, ekkor $(\mathcal{L}y')(z)=zY(z)-3$. Az egyenlet mindkét oldalát Laplace-transzformáljuk: $zY(z)-3=Y(z)$, amiből

$$Y(z)=\frac{3}{z-1},$$

így $y(t)=3e^t$.

b) Legyen $Y=\mathcal{L}y$, ekkor $(\mathcal{L}y'')(z)=z^2Y(z)+2$. Az egyenlet mindkét oldalát Laplace-transzformáljuk: $z^2Y(z)+2=-Y(z)$, amiből

$$Y(z)=-\frac{2}{z^2+1},$$

így $y(t)=-2\sin t$.

c) Legyen $Y=\mathcal{L}y$, ekkor $(\mathcal{L}y')(z)=zY(z)$. Az egyenlet mindkét oldalát Laplace-transzformáljuk: $zY(z)+7Y(z)=\frac{6}{z}$, amiből

$$Y(z)=\frac{6}{z(z+7)}=\frac{6}{7}\frac{1}{z}-\frac{6}{7}\frac{1}{z+7},$$

így $y(t)=\frac{6}{7}-\frac{6}{7}e^{-7t}$.

d) Legyen $Y=\mathcal{L}y$, ekkor $(\mathcal{L}y')(z)=zY(z)$ és $(\mathcal{L}y'')(z)=z^2Y(z)$. Az egyenlet mindkét oldalát Laplace-transzformáljuk:

$$z^2Y(z)+3zY(z)+2Y(z)=\frac{1}{z+1},$$

amiből

$$Y(z)=\frac{1}{(z+1)(z^2+3z+2)}=\frac{1}{(z+1)^2(z+2)}=-\frac{1}{z+1}+\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{z+2},$$

így $y(t)=-e^{-t}+te^{-t}+e^{-2t}$.

e) Legyen $Y=\mathcal{L}y$, ekkor $(\mathcal{L}y')(z)=zY(z)-1$ és $(\mathcal{L}y'')(z)=z^2Y(z)-z$. Az egyenlet mindkét oldalát Laplace-transzformáljuk:

$$z^2Y(z)-z+2zY(z)-2+5Y(z)=0,$$

amiből

$$Y(z)=\frac{z+2}{z^2+2z+5}=\frac{z+1}{(z+1)^2+2^2}+\frac{1}{(z+1)^2+2^2},$$

így $y(t)=e^{-t}\cos 2t+e^{-t}\sin 2t$.

5. Oldjuk meg Laplace-transzformációval az alábbi kezdetiérték-problémákat.
   a) $x' = x + 4y$, $y' = 2x - y$, $x(0) = 2$, $y(0) = -2$
   b) $x' = 2x - 3y$, $y' = 3x + 2y$, $x(0) = 1$, $y(0) = 4$

   Megoldás.
   a) Legyen $X = \mathcal{L}x$ és $Y = \mathcal{L}y$ a megoldás Laplace-transzformáltja, ekkor $(\mathcal{L}x')(z) = zX(z) - 2$ és $(\mathcal{L}y')(z) = zY(z) + 2$. Az egyenletrendszer Laplace-transzformáltja

$$\begin{aligned} zX(z) - 2 &= X(z) + 4Y(z) \\ zY(z) + 2 &= 2X(z) - Y(z). \end{aligned}$$

   Ennek megoldása

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{2}{z+3} \\ Y(z) &= -\frac{2}{z+3}, \end{aligned}$$

   tehát $x(t) = 2e^{-3t}$, $y(t) = -2e^{-3t}$.
   b) Legyen $X = \mathcal{L}x$ és $Y = \mathcal{L}y$ a megoldás Laplace-transzformáltja, ekkor $(\mathcal{L}x')(z) = zX(z) - 1$ és $(\mathcal{L}y')(z) = zY(z) - 4$. Az egyenletrendszer Laplace-transzformáltja

$$\begin{aligned} zX(z) - 1 &= 2X(z) - 3Y(z) \\ zY(z) - 4 &= 3X(z) + 2Y(z). \end{aligned}$$

   Ennek megoldása

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z-14}{z^2-4z+13} = \frac{z-2}{(z-2)^2+3^2} - 4\frac{3}{(z-2)^2+3^2} \\ Y(z) &= \frac{4z-5}{z^2-4z+13} = 4\frac{z-2}{(z-2)^2+3^2} + \frac{3}{(z-2)^2+3^2}, \end{aligned}$$

   tehát $x(t) = e^{2t}\cos 3t - 4e^{2t}\sin 3t$, $y(t) = 4e^{2t}\cos 3t + e^{2t}\sin 3t$.

További gyakorló feladatok

6. Oldjuk meg Laplace-transzformációval a következő differenciálegyenleteket.
   a) $y' = 7y$, $y(0) = -1$
   b) $y'' = -y$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
   c) $2y' - y = 0$, $y(0) = 1/2$
   d) $2y' + y = e^{2t}$, $y(0) = 1$
   e) $y' + y = \sin 3t$, $y(0) = 0$

   Megoldás.
   a) Legyen $Y = \mathcal{L}y$, ekkor $(\mathcal{L}y')(z) = zY(z) + 1$. Az egyenlet mindkét oldalát Laplace-transzformáljuk: $zY(z) + 1 = 7Y(z)$, amiből

$$Y(z) = -\frac{1}{z-7},$$

   így $y(t) = -e^{7t}$.
   b) Legyen $Y = \mathcal{L}y$, ekkor $(\mathcal{L}y'')(z) = z^2Y(z) - z$. Az egyenlet mindkét oldalát Laplace-transzformáljuk: $z^2Y(z) - z = -Y(z)$, amiből

$$Y(z) = \frac{z}{z^2+1},$$

   így $y(t) = \cos t$.

c) Legyen $Y = \mathcal{L}y$, ekkor $(\mathcal{L}y')(z) = zY(z) - \frac{1}{2}$. Az egyenlet mindkét oldalát Laplace-transzformáljuk: $2zY(z) - 1 - Y(z) = 0$, amiből

$$Y(z) = \frac{1}{2z-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{z-\frac{1}{2}},$$

így $y(t) = \frac{1}{2}e^{t/2}$.

d) Legyen $Y = \mathcal{L}y$, ekkor $(\mathcal{L}y')(z) = zY(z) - 1$. Az egyenlet mindkét oldalát Laplace-transzformáljuk: $2zY(z) - 2 + Y(z) = \frac{1}{z-2}$, amiből

$$Y(z) = \frac{2+\frac{1}{z-2}}{2z+1} = \frac{1}{5}\frac{1}{z-2} + \frac{4}{5}\frac{1}{z+\frac{1}{2}},$$

így $y(t) = \frac{1}{5}e^{2t} + \frac{4}{5}e^{-t/2}$.

e) Legyen $Y = \mathcal{L}y$, ekkor $(\mathcal{L}y')(z) = zY(z)$. Az egyenlet mindkét oldalát Laplace-transzformáljuk:

$$zY(z) + Y(z) = \frac{3}{z^2+3^2},$$

amiből

$$Y(z) = \frac{3}{(z^2+9)(z+1)} = -\frac{3}{10}\frac{z}{z^2+3^2} + \frac{1}{10}\frac{3}{z^2+3^2} + \frac{3}{10}\frac{1}{z+1},$$

tehát

$$y(x) = -\frac{3}{10}\cos 3t + \frac{1}{10}\sin 3t + \frac{3}{10}e^{-t}.$$

7. Oldjuk meg Laplace-transzformációval az alábbi kezdetiérték-problémákat.
   a) $x' = 5x - y$, $y' = 3x + y$, $x(0) = -1$, $y(0) = 2$
   b) $x' = -8y$, $y' = 2x$, $x(0) = 1$, $y(0) = -2$

Megoldás.

a) Legyen $X = \mathcal{L}x$ és $Y = \mathcal{L}y$ a megoldás Laplace-transzformáltja, ekkor $(\mathcal{L}x')(z) = zX(z) + 1$ és $(\mathcal{L}y')(z) = zY(z) - 2$. Az egyenletrendszer Laplace-transzformáltja

$$\begin{aligned} zX(z) + 1 &= 5X(z) - Y(z) \\ zY(z) - 2 &= 3X(z) + Y(z). \end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{-z-1}{z^2-6z+8} = -\frac{5}{2}\frac{1}{z-4} + \frac{3}{2}\frac{1}{z-2} \\ Y(z) &= \frac{2z-13}{z^2-6z+8} = -\frac{5}{2}\frac{1}{z-4} + \frac{9}{2}\frac{1}{z-2}, \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{5}{2}e^{4t} + \frac{3}{2}e^{2t} \\ y(t) &= -\frac{5}{2}e^{4t} + \frac{9}{2}e^{2t}. \end{aligned}$$

b) Legyen $X = \mathcal{L}x$ és $Y = \mathcal{L}y$ a megoldás Laplace-transzformáltja, ekkor $(\mathcal{L}x')(z) = zX(z) - 1$ és $(\mathcal{L}y')(z) = zY(z) + 2$. Az egyenletrendszer Laplace-transzformáltja

$$\begin{aligned} zX(z) - 1 &= -8Y(z) \\ zY(z) + 2 &= 2X(z). \end{aligned}$$

Ennek megoldása

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z+16}{z^2+16} = \frac{z}{z^2+4^2} + 4\frac{4}{z^2+4^2} \\ Y(z) &= \frac{-2z+2}{z^2+16} = -2\frac{z}{z^2+4^2} + \frac{1}{2}\frac{4}{z^2+4^2}, \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos 4t + 4\sin 4t \\ y(t) &= -2\cos 4t + \frac{1}{2}\sin 4t. \end{aligned}$$