Matematika A2c gyakorlat

Vegyészmérnöki, Biomérnöki, Környezetmérnöki szakok, 2017/18 ősz

8. feladatsor: Többváltozós függvények határértéke (megoldás)

---

1. Számoljuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy+3}{x^2y+4}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin x}{\cos y}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^2y)}{x^2\cos y^2}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \dfrac{\sin xy}{x}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \arctan(xy)\cdot\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{y}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{2x^2+2y^2}$

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3xy^3}{2x^2+2y^2}$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{2x^2+3y^2}$

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2+5y^2}{2x^2+y^2}$

k) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-2)} \dfrac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2}$

l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+xy-y}{x+xy+y}$

Megoldás.

a) A megadott függvény kétváltozós racionális törtfüggvény, tehát az egész értelmezési tartományán folytonos. A $(0,0)$ pont benne van az értelmezési tartományban, tehát ott a határérték egyenlő a helyettesítési értékkel, azaz $\frac{3}{4}$

b) A függvény két folytonos függvény hányadosa, tehát a nevező zérushelyein kívül folytonos. A $(0,0)$ pontban a nevező 1, így ott a határérték megegyezik a helyettesítési értékkel, vagyis 0.

c) A nevezőben $\cos y^2$ határértéke 1, ez nem befolyásolja a határértéket. $|\sin(x^2y)| \leq |x^2y| = x^2|y|$ miatt

$$\left|\frac{\sin(x^2y)}{x^2}\right| \leq |y|,$$

így a rendőr-elv miatt a határérték 0.

d) A $\lim_t \to 0\frac{\sin t}{t} = 1$ nevezetes határérték felhasználásával

$$\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{(x,y)\to(0,3)} y\frac{\sin xy}{xy} = 3.$$

e) Az első tényező folytonos, határértéke 0, míg a második tényező korlátos, így a szorzat határértéke is 0.

f) Ez a határérték nem létezik. Például az $y = mx$ egyenes mentén haladva

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{mx} = \frac{1}{m},$$

ami függ a meredekségtől, ha létezne határéték, akkor ez nem fordulhatna elő.

g) Az $y = mx$ egyenes mentén számoljuk ki a határértéket:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot mx}{2x^2 + 2m^2x^2} = \frac{m}{2 + 2m^2},$$

ez függ a meredekségtől, tehát nem létezik határérték.

h) A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint $2|xy| \leq x^2 + y^2$, emiatt

$$\left|\frac{3xy^3}{2x^2 + 2y^2}\right| \leq \frac{3}{4}y^2,$$

így a rendőr-elv miatt a határérték a $(0, 0)$ pontban 0.

i) $2\sqrt{6}|xy| \leq 2x^2 + 3y^2$ felhasználásával

$$\left|\frac{xy^2}{2x^2 + 3y^2}\right| \leq \frac{1}{2\sqrt{6}}|y|,$$

tehát a rendőr-elv miatt a határérték 0. (Valamivel gyengébb, de a célnak megfelelő korlátot egyszerűbben is kaphatunk: $|xy| \leq 2|xy| \leq x^2 + y^2 \leq 2x^2 + 3y^2$.)

j) Az $y = mx$ egyenes mentén számoljuk ki a határértéket:

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2 + 5m^2x^2}{2x^2 + m^2x^2} = \frac{3 + 5m^2}{2 + m^2}.$$

Ez függ a meredekségtől, tehát nem létezik határérték.

k)

$$\lim_{(x,y)\to(2,-2)} \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2} = \lim_{(x,y)\to(2,-2)} \frac{(x + y)^2}{(x + y)(x - y)} = \lim_{(x,y)\to(2,-2)} \frac{x + y}{x - y} = 0.$$

l) Az $y = mx$ egyenes mentén számoljuk a határértéket:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x + mx^2 - mx}{x + mx^2 + mx} = \frac{1 - m}{1 + m},$$

ami függ a meredekségtől, tehát nincs határérték.

2. Mely pontokban folytonos az

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2}{4x^4+7y^4} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény?

Megoldás. Ha $(x, y) \neq (0, 0)$, akkor a függvény egy olyan racionális törtfüggvénnyel egyezik meg, aminek a nevezője nem 0, tehát folytonos. A $(0, 0)$ pontban ki kell számolni a határértéket. $y = mx$ egyenes mentén haladva

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{3m^2x^4}{4x^4 + 7m^4x^4} = \frac{3m^2}{4 + 7m^4},$$

ami függ a meredekségtől, a határérték nem létezik, tehát f nem folytonos az origóban.

3. Adjuk meg c értékét úgy, hogy az

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ c & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény minden pontban folytonos legyen.

Megoldás. Ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor a függvény egy olyan racionális törtfüggvénnyel egyezik meg, aminek a nevezője nem 0, tehát folytonos. Az origóban akkor lesz folytonos, ha c az ottani határértékkel egyezik meg.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^2+y^2} = \infty,$$

hiszen ha $K > 0$ és $\delta = \frac{1}{\sqrt{K}}$, akkor $\sqrt{x^2+y^2} \leq \delta$ esetén $\frac{1}{x^2+y^2} \geq K$. Másrészt arctan végtelenbeli határértéke $\frac{\pi}{2}$, tehát f határértéke is ennyi az origóban. A folytonosság feltétele $c = \frac{\pi}{2}$.

További gyakorló feladatok

4. Számoljuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x^3-y}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{y(x+y)}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)} \dfrac{e^{x^2-3y}}{1+2x^2+3y^2}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{1}{x-y}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x+3y}{2x+8y}$

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (3x^2+4y^2) \arctan \dfrac{x}{y}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \sin 2y}{x^2+y^2}$

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 \sin 2y}{2x^2+5y^2}$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^5 y^3}{2x^8+y^8}$

Megoldás.

a) Az $y = mx$ egyenes mentén haladva

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-mx}{x^3-mx} = \frac{1-m}{-m},$$

ez függ a meredekségtől, tehát nem létezik a határérték.

b) Az $y = mx$ egyenes mentén a határérték

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{m(1+m)x^2} = \frac{1}{m(1+m)},$$

ami függ a meredekségtől, így nem létezik határérték.

c) A függvény folytonos függvények hányadosa, a nevező a $(2,1)$ pontban nem 0, tehát létezik ott határérték, és megegyezik a helyettesítési értékkel:

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{e^{x^2-3y}}{1+2x^2+3y^2} = \frac{e}{12}.$$

d) A számláló 1, a nevező a megadott pontban 0 és folytonos, tehát az abszolútérték végtelenhez tart. Viszont az $x<y$ félsíkban negatív, az $x>y$ félsíkban pozitív, tehát a két félsík határán lévő $(1,1)$ pont bármely környezetében találunk nagy abszolútértékű pozitív és negatív függvényértékeket. Tehát nem létezik határérték.

e) Számoljuk ki az $y = mx$ egyenesek mentén a határértéket:

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x+3mx}{2x+8mx} = \frac{4+3m}{2+8m},$$

ez nem független a meredekségtől, tehát nincs határérték.

f) Az első tényező folytonos, helyettesítési értéke 0, míg a második tényező korlátos, így a szorzat határtértéke is 0.

g) Ha $(x,y)\neq 0$, akkor

$$\left|\frac{x^2\sin 2y}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right| \le |x|.$$

A rendőr-elv alapján a határérték 0.

h) Ha $(x,y)\neq 0$, akkor

$$\left|\frac{x^2\sin 2y}{2x^2+5y^2}\right| \le \left|\frac{x^2\sin 2y}{x^2+y^2}\right| \le \left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right| \le |x|.$$

A rendőr-elv alapján a határérték 0.

i) Az $y = mx$ egyenes mentén haladva

$$\lim_{x\to 0} \frac{m^3x^8}{2x^8+m^8x^8} = \frac{m^3}{2+m^8}$$

a határérték, ez függ a meredekségtől, tehát a kétváltozós függvénynek nincs határértéke az origóban.

5. Legyen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+x^2y+y^2}{x^4+y^2} & \text{ha } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az origón átmenő bármely egyenes mentén felvéve egy origóhoz tartó pontsorozatot, az ezekhez tartozó függvényértékek sorozatának mindig ugyanaz a határértéke. Vizsgáljuk meg a függvényértékek sorozatának határértékét akkor is, ha az $y = x^2$ egyenletű parabolán közelítünk az origóhoz. Van-e a függvénynek határértéke az origóban?

Megoldás. Tekintsük a függvényt az $y = mx$ egyenes mentén:

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{t\to 0} \frac{x^4+mx^3+m^2x^2}{x^4+m^2x^2} = \begin{cases} \lim_{x\to 0} \frac{x^2+mx+m^2}{x^2+m^2} = \frac{m^2}{m^2} = 1 & \text{ha } m\neq 0 \\ \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4} = 1 & \text{ha } m = 0. \end{cases}$$

Meg kell még vizsgálni a függőleges egyenest:

$$\lim_{y \to 0} f(0, y) = \lim_{y \to 0} \frac{y^2}{y^2} = 1,$$

tehát minden egyenes mentén 1 a határérték.
Ugyanakkor a megadott $y = x^2$ parabola mentén haladva

$$\lim_{x \to 0} f(x, x^2) = \lim_{x \to 0} \frac{3x^4}{2x^4} = \frac{3}{2},$$

tehát nem létezik az origóban f határértéke.