

Matematika A2c gyakorlat

Vegyésmérnöki, Biomérnöki, Környezetmérnöki szakok, 2017/18 őszi

8. feladatsor: Többváltozós függvények határértéke

1. Számoljuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy + 3}{x^2y + 4}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin x}{\cos y}$

c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2 \cos y^2}$

d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{\sin xy}{x}$

e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \arctan(xy) \cdot \sin \frac{1}{x^2 + y^2}$

f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{y}$

g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{2x^2 + 2y^2}$

h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy^3}{2x^2 + 2y^2}$

i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{2x^2 + 3y^2}$

j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 + 5y^2}{2x^2 + y^2}$

k) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-2)} \frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$

l) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x + xy - y}{x + xy + y}$

2. Mely pontokban folytonos az

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2y^2}{4x^4 + 7y^4} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény?

3. Adjuk meg c értékét úgy, hogy az

$$f(x, y) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ c & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény minden pontban folytonos legyen.

További gyakorló feladatok

4. Számoljuk ki a következő határértékeket:

a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{x^3 - y}$

b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{y(x + y)}$

- c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{e^{x^2-3y}}{1+2x^2+3y^2}$
- d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{1}{x-y}$
- e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4x+3y}{2x+8y}$
- f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (3x^2+4y^2) \arctan \frac{x}{y}$
- g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin 2y}{x^2+y^2}$
- h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin 2y}{2x^2+5y^2}$
- i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5 y^3}{2x^8+y^8}$

5. Legyen

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 + x^2 y + y^2}{x^4 + y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Mutassuk meg, hogy az origón átmenő bármely egyenes mentén felvéve egy origóhoz tartó pontsorozatot, az ezekhez tartozó függvényértékek sorozatának mindig ugyanaz a határértéke. Vizsgáljuk meg a függvényértékek sorozatának határértékét akkor is, ha az $y = x^2$ egyenletű parabolán közelítünk az origóhoz. Van-e a függvénynek határértéke az origóban?