Matematika A2c gyakorlat

Vegyészmérnöki, Biomérnöki, Környezetmérnöki szakok, 2017/18 ősz

9. feladatsor: Többváltozós függvények deriválása (megoldás)

---

1. Számoljuk ki a következő függvények parciális deriváltjait.

   a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 e^{x+y^2}}{2x^2+1} + \ln(x^4+1) + (2y+1)^6$

   b) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2x - 5y + \ln 2$

   Megoldás.

   a)

$$f'_x(x,y) = \frac{(2xe^{x+y^2} + x^2e^{x+y^2})(2x^2+1) - x^2e^{x+y^2} \cdot 4x}{(2x^2+1)^2} + \frac{4x^3}{x^4+1}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{e^{x+y^2}x^2 \cdot 2y}{2x^2+1} + 12(2y+1)^5$$

   b)

$$f'_x(x,y) = 3x^2 + -3y^2 + 2$$

$$f'_y(x,y) = -6xy - 5$$

2. Legyen $f(x,y) = \sqrt{5(x-1)^4 + 4y^2}$. Írjuk fel az elsőrendű parciális deriváltfüggvényeket. (Az $(1,0)$ pontban használjuk a definíciót.)

   Megoldás. Ha $(x,y) \neq (1,0)$, akkor mindkét parciális derivált számolásánál egy olyan összetett függvényt kell deriválni, aminek a külső és belső függvénye is differenciálható:

$$f'_x(x,y) = \frac{10(x-1)^3}{\sqrt{5(x-1)^4 + 4y^2}}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{4y}{\sqrt{5(x-1)^4 + 4y^2}}$$

   Az $(1,0)$ pontban azonban a gyök alatt 0 áll, ott a külső függvény nem differenciálható. Emiatt a definíció alapján számolunk:

$$f'_x(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,0) - f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{5h^4}}{h} = \lim_{h\to 0} \sqrt{5}h = 0.$$

   Hasonlóan írhatjuk fel az y irányú deriváltat:

$$f'_y(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,h) - f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} 2\frac{|h|}{h},$$

   ami nem létezik: jobbról 2, balról -2 a határérték.

3. Legyen $f(x,y) = (2x-y)^4 + 4x^3 - 8y^2$. Számoljuk ki az elsőrendű és másodrendű parciális deriváltakat. Hol deriválható (totálisan) a függvény? Mivel egyenlő $\operatorname{grad} f(1,2)$?

   Megoldás. A parciális deriváltfüggvények

$$f'_x(x,y) = 8(2x-y)^3 + 12x^2$$

$$f'_y(x,y) = -4(2x-y)^3 - 16y.$$

   Mivel ezek mindenhol folytonosak, az f függvény az egész $\mathbb{R}^2$ halmazon totálisan differenciálható. A gradiens komponensfüggvényei éppen a parciális deriváltak, $\operatorname{grad} f(1,2) = (f'_x(1,2), f'_y(1,2)) = (12, -32)$.

4. Legyen

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x-2)y^2}{x^2+y^2}+6x+3y & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{egyébként.}\end{cases}$$

Mivel egyenlő $f'_x(x,y)$ ás $f'_x(x,y)$? Hol differenciálható (totálisan) f?

Megoldás. Ha $(x,y)\neq(0,0)$, akkor a függvény egy olyan racionális törtfüggvénnyel egyenlő, aminek a nevezője nem 0, tehát ott totálisan differenciálható. A parciális deriváltfüggvények

$$f'_x(x,y)=\frac{y^2(x^2+y^2)-(x-2)y^2\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2}+6$$
$$f'_y(x,y)=\frac{(x-2)\cdot 2y-(x-2)y^2\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}+3.$$

A $(0,0)$ pontban a definíciót használjuk. A parciális deriváltak

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{6h}{h}=6$$

és

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-2h^2}{h^3}+\frac{3h}{h},$$

ami nem létezik. Így f nem lehet totálisan differenciálható sem az origóban.

5. Adott az $f(x,y,z)=x^3+y^4+x^2ye^{2z}$ függvény. Mivel egyenlő $\operatorname{grad} f(-1,1,0)$? Miért létezik? $f'''_{xxz}=?$ $f'''_{xzx}=?$

Megoldás. A parciális deriváltfüggvények

$$f'_x(x,y,z)=3x^2+2xye^{2z}$$
$$f'_z(x,y,z)=4y^3+x^2e^{2z}$$
$$f'_y(x,y,z)=2x^2ye^{2z}.$$

Mivel ezek folytonos függvények, f differenciálható, és így létezik a gradiens, komponensei éppen a parciális deriváltak. A megadott pontot behelyettesítve $\operatorname{grad} f(-1,1,0)=(1,5,2)$ adódik. A kiszámolandó magasabbrendű deriváltak:

$$f'''_{xxz}(x,y,z)=(2x^2ye^{2z})''_{xx}=(4xye^{2z})'_x=4ye^{2z}$$
$$f'''_{xzx}(x,y,z)=(3x^2+2xye^{2z})''_{xz}=(4xye^{2z})'_x=4ye^{2z}.$$

Mivel a szereplő deriváltfüggvények folytonosak, a Young-tételből is következik, hogy f'''_{xxz} és f'''_{xzx} megegyezik.

6. Írjuk fel $f(x,y)=(2x-y)^2+4x^2-8y$ függvény $P_0(1,2)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!

Megoldás. Először számoljuk ki a parciális deriváltfüggvényeket:

$$f'_x(x,y)=8x+4(2x-y)$$
$$f'_y(x,y)=-8-2(2x-y).$$

Mivel mindkettő folytonos, f totálisan differenciálható. A gradiens komponensei a most kiszámolt deriváltak, tehát $\operatorname{grad} f(1,2)=(8,-8)$. A függvényérték $f(1,2)=-12$, tehát az érintősík egyenlete $z=-12+8(x-1)-8(y-2)$.

További gyakorló feladatok

7.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(y^2+2x^2)}{\sqrt{y^2+2x^2}} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =?$ Folytonos-e f az origóban?

b) $f'_x(0,0) =?$ (Használjuk a definíciót.)

c) Totálisan deriválható-e f az origóban?

Megoldás.

a) Ha $(x,y) \to 0$, akkor $y^2+2x^2 \to 0$ felülről, mivel ez a függvény folytonos, nemnegatív, a helyettesítési érték 0. f ennek a függvénynek és a $t \mapsto \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ függvénynek a kompozíciója, így az origóban az utóbbi függvény 0 pontbeli jobboldali határértékéhez tart.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} = \lim_{t\to 0+} \frac{\sin t}{t}\sqrt{t} = 0,$$

mivel az első tényező határértéke 1 és a négyzetgyök (jobbról) folytonos. A határérték megegyezik a helyettesítési értékkel is, tehát f folytonos az origóban.

b) A definíció alapján

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(2h^2)}{\sqrt{2}|h|h} = \sqrt{2} \lim_{h\to 0} \frac{\sin(2h^2)}{2h^2} \frac{h}{|h|}$$

nem létezik, balról $-\sqrt{2}$, jobbról $+\sqrt{2}$ a határérték.

c) Mivel nem létezik x szerinti parciális derivált, f nem differenciálható az origóban.

8. Írjuk fel az $f(x,y,z) = x^2y + yz - 5z^2$ függvény gradiensét! Miért létezik a gradiens? Számítsuk ki az f függvény $P_0 = (0,10,1)$ pontbeli $\mathbf{v} = (-3,4,0)$ irányú deriváltját.

Megoldás. A parciális deriváltak

$$f'_x(x,y,z) = 2xy$$
$$f'_y(x,y,z) = x^2 + z$$
$$f'_z(x,y,z) = y - 10z.$$

Mivel mindegyik folytonos, f differenciálható, és így létezik gradiens: $\operatorname{grad} f(x,y,z) = (2xy, x^2+z, y-10z)$. A P_0 pontban $\operatorname{grad} f(0,10,1) = (0,1,0)$, a $\mathbf{v}$ irányú egységvektor

$$\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right),$$

az iránymenti derivált a kettő skaláris szorzata, tehát $\frac{4}{5}$.

9. Adott az $f(x,y) = 3y + e^{xy^2} - 2y \arctan \dfrac{x}{y}$ függvény és a $P_0 = (0,1)$ pont.

a) $f'_x(x,y) =?$; $f'_y(x,y) =?$, ha $y \neq 0$

b) Írjuk fel az f függvény P_0 pontbeli érintősíkjának egyenletét!

c) Mennyi az f függvény P_0 pontbeli $\mathbf{v} = (2,-7)$ irányú deriváltja?

d) Adjuk meg az f függvény P_0 pontbeli iránymenti deriváltjának maximumát (minimumát), és adjuk meg a maximumhoz (minimumhoz) tartozó irányt.

Megoldás.

a) A függvény $y \neq 0$ pontokban parciálisan differenciálható, a parciális deriváltfüggvények

$$f'_x(x,y) = e^{xy^2}y^2 - \frac{2}{1+\frac{x^2}{y^2}}$$
$$f'_y(x,y) = 3 + 2e^{xy^2}xy - 2\arctan\frac{x}{y} + \frac{2x}{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)y}.$$

b) A P_0 pontban a parciális deriváltak folytonosak, tehát f differenciálható, a grafikonjának létezik érintősíkja. $f(0,1) = 4$ és $\operatorname{grad} f(0,1) = (-1,3)$ alapján az érintősík egyenlete $z = 4 - 1(x-0) + 3(y-1)$.

c) A $\mathbf{v}$ irányában az iránymenti derivált

$$\frac{\mathbf{v}\cdot \operatorname{grad} f(0,1)}{|\mathbf{v}|} = -\frac{23}{\sqrt{53}}.$$

d) A maximális iránymenti derivált $|\operatorname{grad} f(0,1)| = \sqrt{10}$.

10. Az $f(x,y) = \dfrac{y^3}{e^{2x+1}}$ képlettel megadott felületre a $\left(-\frac{1}{2},1\right)$ pont fölött egy vízcseppet ejtünk. Merre fog elindulni? Mekkora az adott pontban a maximális meredekség?

Megoldás. A csepp abba az irányba indul el, amerre a leggyorsabban csökken a függvény, tehát $-\operatorname{grad} f(-\frac{1}{2},1)$ irányba. A parciális deriváltak

$$f'_x(x,y) = -2e^{-1-2x}y^3$$
$$f'_y(x,y) = 3e^{-1-2x}y^2,$$

ezek folytonosak, tehát létezik gradiens és $\operatorname{grad} f(-1/2,1) = (-2,3)$. A csepp tehát a $(2,-3)$ irányba indul. A legnagyobb meredekség $|\operatorname{grad} f(-1/2,1)| = \sqrt{13}$.

11. Legyen

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-3y^2}{2x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ -3 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =?$ Folytonos-e f az origóban?

b) $f'_x(x,y) =?$ $f'_y(x,y) =?$ (Az origóban használjuk a definíciót!)

c) Mennyi az f függvény $(1,-1)$ pontbeli $\mathbf{v} = (-5,1)$ irányú deriváltja?

d) Adjuk meg az f függvény $(1,-1)$ pontbeli iránymenti deriváltjának maximumát és minimumát!

e) Írjuk fel az f függvény $(1,-1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!

Megoldás.

a) Tekintsük a függvényt az $y = mx$ mentén. Itt a határérték

$$\lim_{x\to0} f(x,mx) = \lim_{x\to0}\frac{x^2-3m^2x^2}{2x^2+m^2x^2} = \frac{1-3m^2}{2+m^2}.$$

Ez függ a meredekségtől, tehát az f függvénynek nem létezik a határértéke az origóban, így folytonos sem lehet.

b) Az origón kívül

$$f'_x(x,y) = \frac{2x(2x^2+y^2)-(x^2-3y^2)\cdot 4x}{(2x^2+y^2)^2}$$
$$f'_y(x,y) = \frac{-6y(2x^2+y^2)-(x^2-3y^2)\cdot 2y}{(2x^2+y^2)^2}.$$

Az origóban a definíciót használjuk:

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^2}{2h^2} - (-3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{5}{h}$$

nem létezik,

$$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-3h^2}{h^2} - (-3)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

c) $\operatorname{grad} f(1,-1) = \frac{14}{9}(1,1)$, a $\mathbf{v}$ irányú derivált

$$\frac{\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} f(1,-1)}{|\mathbf{v}|} = -\frac{28\sqrt{\frac{2}{13}}}{9}.$$

d) A maximális iránymenti derivált $|\operatorname{grad} f(1,-1)| = 14\sqrt{2}/9$, a minimális ennek ellentettje, azaz $-14\sqrt{2}/9$.

e) A függvényérték $f(1,-1) = -\frac{2}{3}$, tehát az érintősík egyenlete

$$z = -\frac{2}{3} + \frac{14}{9}(x-1) + \frac{14}{9}(y+1).$$