Matematika A2c gyakorlat

Vegyészmérnöki, Biomérnöki, Környezetmérnöki szakok, 2017/18 ősz

9. feladatsor: Többváltozós függvények deriválása

---

1. Számoljuk ki a következő függvények parciális deriváltjait.
   a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 e^{x+y^2}}{2x^2+1} + \ln(x^4+1) + (2y+1)^6$
   b) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2x - 5y + \ln 2$
2. Legyen $f(x,y) = \sqrt{5(x-1)^4 + 4y^2}$. Írjuk fel az elsőrendű parciális deriváltfüggvényeket. (Az $(1,0)$ pontban használjuk a definíciót.)
3. Legyen $f(x,y) = (2x-y)^4 + 4x^3 - 8y^2$. Számoljuk ki az elsőrendű és másodrendű parciális deriváltakat. Hol deriválható (totálisan) a függvény? Mivel egyenlő $\operatorname{grad} f(1,2)$?
4. Legyen
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-2)y^2}{x^2+y^2} + 6x + 3y & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$
   Mivel egyenlő $f'_x(x,y)$ ás $f'_x(x,y)$? Hol differenciálható (totálisan) f?
5. Adott az $f(x,y,z) = x^3 + y^4 + x^2 y e^{2z}$ függvény. Mivel egyenlő $\operatorname{grad} f(-1,1,0)$? Miért létezik? $f'''_{xxz} =$? $f'''_{xzx} =$?
6. Írjuk fel $f(x,y) = (2x-y)^2 + 4x^2 - 8y$ függvény $P_0(1,2)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!

További gyakorló feladatok

7.
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(y^2+2x^2)}{\sqrt{y^2+2x^2}} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$
   a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$? Folytonos-e f az origóban?
   b) $f'_x(0,0) =$? (Használjuk a definíciót.)
   c) Totálisan deriválható-e f az origóban?
8. Írjuk fel az $f(x,y,z) = x^2 y + yz - 5z^2$ függvény gradiensét! Miért létezik a gradiens? Számítsuk ki az f függvény $P_0 = (0,10,1)$ pontbeli $\mathbf{v} = (-3,4,0)$ irányú deriváltját.
9. Adott az $f(x,y) = 3y + e^{xy^2} - 2y \arctan \dfrac{x}{y}$ függvény és a $P_0 = (0,1)$ pont.
   a) $f'_x(x,y) =$?; $f'_y(x,y) =$?, ha $y \neq 0$
   b) Írjuk fel az f függvény P_0 pontbeli érintősíkjának egyenletét!
   c) Mennyi az f függvény P_0 pontbeli $\mathbf{v} = (2,-7)$ irányú deriváltja?
   d) Adjuk meg az f függvény P_0 pontbeli iránymenti deriváltjának maximumát (minimumát), és adjuk meg a maximumhoz (minimumhoz) tartozó irányt.
10. Az $f(x,y) = \dfrac{y^3}{e^{2x+1}}$ képlettel megadott felületre a $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ pont fölött egy vízcseppet ejtünk. Merre fog elindulni? Mekkora az adott pontban a maximális meredekség?
11. Legyen
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-3y^2}{2x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ -3 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =?$ Folytonos-e f az origóban?

b) $f'_x(x,y) =?$ $f'_y(x,y) =?$ (Az origóban használjuk a definíciót!)

c) Mennyi az f függvény $(1,-1)$ pontbeli $\mathbf{v} = (-5,1)$ irányú deriváltja?

d) Adjuk meg az f függvény $(1,-1)$ pontbeli iránymenti deriváltjának maximumát és minimumát!

e) Írjuk fel az f függvény $(1,-1)$ pontbeli érintősíkjának egyenletét!