Matematika A2c vizsga – 2017. december 18.

Elmélet (5×2p)

1. Definiálja a mátrix inverzének fogalmát.

   Megoldás. Az A mátrix inverze az A^{-1} mátrix, ha AA^{-1} és $A^{-1}A$ egységmátrix.

2. Ismertesse a Laplace-transzformált definícióját.

   Megoldás. Egy $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltja az $\mathcal{L}f : D \to \mathbb{C}$ függvény, amire $\mathcal{L}f(z) = \int_0^\infty f(x)e^{-zx}\,\mathrm{d}x$, $D \subseteq \mathbb{C}$ azon komplex számokból áll, amire ez az integrál létezik.

3. Definiálja az iránymenti derivált fogalmát.

   Megoldás. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény $\mathbf{v}$ irányú iránymenti deriváltja az $\mathbf{x}_0$ pontban a $t \mapsto f\left(\mathbf{x}_0 + t\frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}\right)$ egyváltozós függvény 0 pontbeli deriváltja.

4. Mit nevezünk egy többváltozós függvény adott felosztáshoz tartozó alsó és felső integrálközelítő összegén?

   Megoldás. Legyen az A Jordan-mérhető halmaz felosztása $A_1, \dots, A_k$. Az $f : A \to \mathbb{R}$ függvény ezen felosztáshoz tartozó alsó és felső integrálközelítő összege $\sum_{i=1}^k \mathrm{vol}(A_i) \inf_{\mathbf{x}\in A_i} f(\mathbf{x})$ és $\sum_{i=1}^k \mathrm{vol}(A_i) \sup_{\mathbf{x}\in A_i} f(\mathbf{x})$.

5. Definiálja a hatványsorok konvergenciasugarát.

   Megoldás. A $\sum_{n=0}^\infty a_n(x-x_0)^n$ hatványsor konvergenciasugara R, ha $|x-x_0| < R$ esetén konvergens, $|x-x_0| > R$ esetén divergens.

Feladatok (5×10p)

1. Számítsa ki az

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

   mátrix inverzét.

   Megoldás. Az inverz mátrixot Gauss–Jordan-eliminációval lehet meghatározni:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 5 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{s_2-3s_1\\ s_3+s_1\\ s_4-2s_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{s_4-2s_2}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_4-5s_3}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -5 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{s_1-2s_4\\ s_2+s_4}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 4 & 10 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & -1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & -5 & 1 \end{array}\right],$$

   tehát az inverz

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 10 & -2 \\ -4 & -1 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Határozza meg az $(1+x^2)y' + 2xy = 1 - 5x^4$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet elsőrendű inhomogén lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg: $(1+x^2)y' + 2xy = 0$. Ez szétválasztható,

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2x}{1+x^2}$$

mindkét oldalát integráljuk:

$$\ln y(x) = -\ln(1+x^2) + C,$$

tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = \frac{C}{1+x^2}$.
Az inhomogén egyenlet megoldását az állandók variálásának módszerével kereshetjük meg. Az egyenletbe az $y(x) = c(x)\frac{1}{1+x^2}$ függvényt helyettesítve a $c'(x) = 1 - 5x^4$ feltétel adódik, tehát

$$c(x) = \int (1 - 5x^4)\,\mathrm{d}x = x - x^5 + C,$$

az általános megoldás $y(x) = \dfrac{x - x^5 + C}{1+x^2}$.

3. Döntse el, hogy létezik-e a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{7xy^3}{x^2+y^2}\frac{\sin(xy)}{xy}$$

határérték. Ha igen, adja is meg az értékét.

Megoldás. A második tényező $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ és $(x,y) \mapsto xy$ kompozíciója. A belső függvény folytonos, helyettesítési értéke a $(0,0)$ pontban 0, ebben a pontban a külső függvény határértéke 1. Tehát ez a tényező sem a konvergencia tényét, sem az esetleges határértéket nem befolyásolja.
Az első tényező abszolútértékét a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenséggel becsülhetjük ($|2xy| \leq x^2 + y^2$ alakban):

$$\left|\frac{7xy^3}{x^2+y^2}\right| = \frac{7}{2}y^2\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right| \leq \frac{7}{2}y^2.$$

A jobb oldalon álló kifejezésnek a $(0,0)$ pontban 0 a határértéke, tehát a keresett határérték létezik és 0 az értéke.

4. Integrálja az $f(x,y) = x^2y$ függvényt az $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0\right\}$ tartományon.

Megoldás. A megadott tartomány félkör, így érdemes polárkoordinátákra áttérni: $x(r,\varphi) = r\cos\varphi$, $y(r,\varphi) = r\sin\varphi$, a Jacobi-determináns r, a paramétertartomány az $1 \leq r \leq 2$, $0 \leq \varphi \leq \pi$ egyenlőtlenségek által meghatározott téglalap. $f(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) = r^3\cos^2\varphi\sin\varphi$, tehát a keresett integrál

$$\begin{aligned}\int_A f\,\mathrm{d}A &= \int_0^\pi \int_1^2 r^3\cos^2\varphi\sin\varphi \cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_1^2 r^4\,\mathrm{d}r \int_0^\pi \cos^2\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \left[\frac{r^5}{5}\right]_{r=1}^{r=2}\left[-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right]_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} = \frac{32-1}{5}\cdot\frac{1-(-1)}{3} = \frac{62}{15}.\end{aligned}$$

5. Legyen

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & \text{ha } x \in [\pi/2, 3\pi/2] \end{cases}$$

2π szerint periodikusan kiterjesztve. Határozza meg f Fourier-sorát. Mely pontokban állítja elő a függvényt a sor?

Megoldás. A függvény páratlan, tehát Fourier-sora tiszán szinusz sor: $\sum_{n=1} b_n \sin nx$, ahol

$$\begin{aligned}b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x\sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n}\right]_{x=-\pi/2}^{x=\pi/2} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right]_{x=-\pi/2}^{x=\pi/2} = \begin{cases} (-1)^{k+1}\frac{1}{2k} & \text{ha } n = 2k \ (k \in \mathbb{Z}) \\ (-1)^k\frac{2}{\pi}\frac{1}{(2k+1)^2} & \text{ha } n = 2k+1 \ (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}\end{aligned}$$

Mivel f szakaszonként folytonosan differenciálható, azokban a pontokban állítja elő a Fourier-sor, ahol folytonos, tehát az $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ pontok kivételével mindenhol.