Matematika A2c vizsga – 2018. január 5.

Elmélet (5×2p)

1. Definiálja a vektorterek dimenzióját.

   Megoldás. Egy vektortér dimenziója a bázisainak (közös) elemszáma.

2. Mit nevezünk szétválasztható differenciálegyenletnek?

   Megoldás. Az $y' = f(x)g(y)$ alakú egyenleteket.

3. Mondja ki a Young-tételt.

   Megoldás. Ha az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény második parciális deriváltjai folytonosak, akkor $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

4. Mondja ki a Fubini-tétel normáltartományra vonatkozó változatát.

   Megoldás. Ha $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in [a, b], g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$ és $f : A \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor $\int_A f \,\mathrm{d}A = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$.

5. Ismertesse a Weierstrass-kritériumot.

   Megoldás. Ha minden n-re $f_n : H \to \mathbb{R}$ és $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{x \in H} |f_n(x)| < \infty$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor egyenletesen konvergens.

Feladatok (5×10p)

1. A térben az $(1, 5, 3)$, $(1, 4, 2)$ és $(-1, -2, -1)$ vektorok bázist alkotnak. Írja fel a $z = 0$ egyenletű síkra vetítés mátrixát ebben a bázisban.

   Megoldás. A megadott bázisvektorok képei a vetítés után $(1, 5, 0)$, $(1, 4, 0)$ és $(-1, -2, 0)$. Mindháromnak meg kell határozni a koordinátáit a megadott bázisra nézve. Ezt megtehetjük Gauss–Jordan-eliminációval (szimultán lineáris egyenletrendszer megoldására alkalmazva):

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -2 & 5 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \overset{\substack{s_2 - 5s_1 \\ s_3 - 3s_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{s_1 + s_2 \\ s_3 - s_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right] \overset{\substack{s_1 + 2s_3 \\ s_2 + 3s_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -9 & -7 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{s_2 \cdot (-1) \\ s_3 \cdot (-1)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

   A jobb oldali 3×3 méretű blokk oszlopai most éppen a bázisvektorok képeinek koordinátáit tartalmazzák a megadott bázisban, tehát ez a transzformáció mátrixa is ezen bázisra nézve.

   Megjegyzés. Úgy is gondolkodhatunk, hogy ha P jelöli a vetítés mátrixát a standard bázisra nézve, S oszlopai pedig az új bázis koordinátái a standard bázisra nézve, akkor bázistranszformációval kaphatjuk meg a megadott bázisban a vetítés mátrixát: $S^{-1}PS$. Itt

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 5 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ és } P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Az inverz kiszámítása történhet a fenti megoldáshoz hasonlóan Gauss–Jordan-eliminációval. (Azt is észrevehetjük, hogy a fenti szimultán egyenletrendszer jobb oldali 3×3 blokkja éppen a PS mátrix.)

2. Laplace-transzformáció segítségével oldja meg az

$$x'(t) = -2x(t) + y(t)$$
$$y'(t) = -x(t)$$

   differenciálegyenlet-rendszert $x(0) = 1$, $y(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett. (Az $f(t) = t^n e^{\alpha t}$ függvény Laplace-transzformáltja $(\mathcal{L}f)(z) = \frac{n!}{(z-\alpha)^{n+1}}$.)

Megoldás. Legyen $X = \mathcal{L}x$ és $Y = \mathcal{L}y$ a megoldás Laplace-transzformáltja, ekkor $(\mathcal{L}x')(z) = zX(z) - 1$ és $(\mathcal{L}y')(z) = zY(z)$. Az egyenletek mindkét oldalának vegyük a Laplace-transzformáltját:

$$\begin{aligned} zX(z) - 1 &= -2X(z) + Y(z) \\ zY(z) &= -X(z). \end{aligned}$$

A kapott lineáris egyenletrendszert megoldjuk, majd parciális törtekre bontunk:

$$X(z) = \frac{z}{(z+1)^2} = -\frac{1}{(1+z)^2} + \frac{1}{1+z} \qquad Y(z) = -\frac{1}{(z+1)^2},$$

tehát a megoldás $x(t) = -te^{-t} + e^{-t}$, $y(t) = -te^{-t}$.

3. Határozza meg az $f(x,y) = e^{-2x^2}(x - y^2)$ függvény lokális szélsőértékeit.

   Megoldás. A függvény mindenhol akárhányszor folytonosan differenciálható, tehát ott lehet lokális szélsőértéke, ahol a gradiens 0. A gradiens komponensfüggvényei

$$\begin{aligned} f'_x(x,y) &= e^{-2x^2}(-4x)(x - y^2) + e^{-2x^2} = e^{-2x^2}(1 - 4x^2 + 4xy^2) \\ f'_y(x,y) &= e^{-2x^2}(-2y) = -2ye^{-2x^2}. \end{aligned}$$

   A két komponens egyszerre akkor 0, ha $y = 0$ és $1 - 4x^2 = 0$, tehát $x = \pm\frac{1}{2}$. A Hesse-mátrix

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4e^{-2x^2}\left(-3x + 4x^3 + y^2 - 4x^2y^2\right) & 8e^{-2x^2}xy \\ 8e^{-2x^2}xy & -2e^{-2x^2} \end{bmatrix},$$

   a stacionárius pontokban

$$H\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{bmatrix} 4e^{-1/2} & 0 \\ 0 & -2e^{-1/2} \end{bmatrix} \text{ és } H\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \begin{bmatrix} -4e^{-1/2} & 0 \\ 0 & -2e^{-1/2} \end{bmatrix},$$

   az előbbi indefinit, az utóbbi pedig negatív definit, tehát a $(-1/2, 0)$ pontban nyeregpont van, az $(1/2, 0)$ pontban pedig lokális maximum, értéke $\frac{1}{2\sqrt{e}}$.

4. Az integrálok sorrendjének felcserélésével számítsa ki

$$\int_0^6 \int_{y/2}^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

   értékét.

   Megoldás. A két egymásba ágyazott integrál megegyezik az $f(x,y) = e^{x^2}$ kétváltozós függvény integráljával az $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le y \le 6, y/2 \le x \le 3\right\} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \le x \le 3, 0 \le y \le 2x\right\}$ halmazon. Az előbbi megadást a határok leolvasásával kapjuk, az utóbbiból pedig a fordított sorrendű integrálás határait lehet látni:

$$\int_0^6 \int_{y/2}^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_A f\,\mathrm{d}A = \int_0^3 \int_0^{2x} e^{x^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^3 e^{x^2} \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \left[e^{x^2}\right]_0^3 = e^9 - 1.$$

5. Határozza meg a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n}{n^2+1} x^n$$

   sor konvergenciatartományát.

   Megoldás. A sor hatványsor, először a konvergenciasugarat határozzuk meg a Cauchy–Hadamard-tétel segítségével.

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n2^n}{n^2+1}} = \limsup_{n\to\infty} 2\sqrt[n]{\frac{n}{n^2+1}} = 2,$$

   tehát a konvergenciasugár $R = 1/2$. A két végpontot külön kell vizsgálni, az $x = -1/2$ pontban

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n2^n}{n^2+1}(-1/2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}$$

   Leibniz-sor, mivel váltakozik az előjele és $\frac{n}{n^2+1}$ monoton csökkenő nullsorozat. Az $x = 1/2$ pontban a tagokat alulról becsülhetjük:

$$\frac{n2^n}{n^2+1}(1/2)^n = \frac{n}{n^2+1} \ge \frac{1}{2}\frac{1}{n},$$

   tehát a minoránskritérium alapján itt divergens, hiszen a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonikus sor is az. Tehát a konvergenciatartomány $(-1/2, 1/2]$.