Matematika A2c vizsga – 2018. január 12.

Elmélet (5×2p)

1. Definiálja a permutációk előjelét.

   Megoldás. Egy permutáció előjele 1, ha felírható páros sok transzpozíció kompozíciójaként, egyébként -1.

2. Ismertessen a Laplace-transzformáció fő tulajdonságai közül legalább hármat.

   Megoldás. $\mathcal{L}$ lineáris; ha $g(x) = f(x-c)$ $(x \geq 0)$, $g(x) = 0$ $(x < c)$, akkor $\mathcal{L}g(z) = e^{-cz}\mathcal{L}f(z)$; ha $g(x) = e^{\alpha x}f(x)$, akkor $\mathcal{L}g(z) = \mathcal{L}f(z-\alpha)$; ha f folytonosan differenciálható a $[0,\infty)$ intervallumon, akkor $\mathcal{L}f'(z) = z\mathcal{L}f(z) - f(0)$; ha $g(x) = xf(x)$, akkor $\mathcal{L}g(z) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\mathcal{L}f(z)$

3. Definiálja egy differenciálható leképezés Jacobi-mátrixát.

   Megoldás. Jelölje az $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés komponensfüggvényeit $f_1, \dots, f_m$. (Tehát $\mathbf{f}(x_1,\dots,x_n) = (f_1(x_1,\dots,x_n),\dots,f_m(x_1,\dots,x_n))$.) Ekkor $\mathbf{f}$ Jacobi-mátrixa a

   $$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

   mátrix.

4. Definiálja a Jordan-mérhető halmaz fogalmát.

   Megoldás. Egy $A \subseteq \mathbb{R}^n$ részhalmaz Jordan-mérhető, ha a külső és belső Jordan-mértéke megegyezik.

5. Definiálja egy 2π szerint periodikus függvény Fourier-sorát.

   Megoldás. Az f 2π szerint periodikus függvény Fourier-sora az $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ trigonometrikus sor, ahol

   $$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Feladatok (5×10p)

1. Határozza meg az

   $$A = \begin{bmatrix} 12 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 2 \\ -12 & 6 & -6 \end{bmatrix}$$

   mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

   Megoldás. A sajátértékek $\det(A - \lambda I)$ gyökei. A determináns a kifejtési tétel alapján

   $$\begin{aligned} \det(A-\lambda I) &= \begin{vmatrix} 12-\lambda & -6 & 6 \\ 4 & -1-\lambda & 2 \\ -12 & 6 & -6-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (12-\lambda)(\lambda^2+7\lambda+6-12) - (-6)(-24-4\lambda+24) + 6(24-12\lambda-12) \\ &= -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 6\lambda = -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3), \end{aligned}$$

   tehát a sajátértékek 0, 2 és 3.
   A $\lambda = 0$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

   $$\begin{bmatrix} 12 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 2 \\ -12 & 6 & -6 \end{bmatrix} \overset{s_1+s_3}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ -12 & 6 & -6 \end{bmatrix} \overset{s_3+3s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

   alapján $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$ többszörösei.

A $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 10 & -6 & 6 \\ 4 & -3 & 2 \\ -12 & 6 & -8 \end{bmatrix} \overset{s_1-2s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ -12 & 6 & -8 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2-2s_1 \\ s_3+6s_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 6 & 4 \end{bmatrix} \overset{s_3+2s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix} -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}^T$ többszörösei.
A $\lambda = 3$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 9 & -6 & 6 \\ 4 & -4 & 2 \\ -12 & 6 & -9 \end{bmatrix} \overset{s_1-2s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -4 & 2 \\ -12 & 6 & -9 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2-4s_1 \\ s_3+12s_1}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -12 & -6 \\ 0 & 30 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\overset{s_2/6}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 30 & 15 \end{bmatrix} \overset{s_3+15s_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

alapján $\begin{bmatrix} -3 & -2 & 3 \end{bmatrix}^T$ többszörösei.

2. $u(x) = \frac{y(x)}{x}$ helyettesítés segítségével oldja meg az

$$y' = \frac{xy + y^2}{x^2}$$

differenciálegyenletet $y(e) = e$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. A megadott helyettesítés alapján

$$u' = \frac{y'}{x} - \frac{1}{x^2}y = \frac{xy + y^2}{x^3} - \frac{1}{x^2}y = \frac{x^2u + x^2u^2}{x^3} - \frac{1}{x^2}xu = \frac{1}{x}u^2,$$

azaz

$$\frac{u'}{u^2} = \frac{1}{x}.$$

Mindkét oldalt integráljük:

$$-\frac{1}{u} = \ln|x| + C,$$

amiből

$$y(x) = xu(x) = -\frac{x}{C + \ln|x|},$$

a kezdeti feltétel alapján $e = -\frac{e}{C+1}$, tehát $C = -2$.

3. Számítsa ki az $f(x, y) = \sqrt{x^4 + 3y^4}$ függvény parciális deriváltfüggvényeit. Az origóban használja a definíciót.

Megoldás. A belső függvény mindenhol differenciálható és az origón kívül nem 0, ilyenkor a külső függvény is differenciálható. A parciális deriváltak a láncszabály alapján

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x^4 + 3y^4}} \cdot 4x^3$$
$$f'_y(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x^4 + 3y^4}} \cdot 12y^3.$$

Az origóban a definíció alapján

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x, 0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

és

$$f'_y(0, 0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0, y)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{\sqrt{3}y^2}{y} = 0.$$

4. Integrálja az $f(x, y) = 15x^2y$ függvényt az $y = x^2$ és $y = 2x - x^2$ görbék által határolt korlátos tartományon.

Megoldás. A megadott tartomány normáltartomány, az $x^2 \le y \le 2x - x^2$ egyenlőtlenségek határozzák meg. A lehetséges x értékek az $x^2 = 2x - x^2$ egyenlet gyökei között vannak, tehát a $[0, 1]$ intervallumban. Az integrál a Fubini-tétel alapján

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{x^2}^{2x-x^2} 15x^2 y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x &= \int_0^1 \left[\frac{15}{2} x^2 y^2 \right]_{y=x^2}^{y=2x-x^2} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \frac{15}{2} x^2 \left((2x - x^2)^2 - (x^2)^2 \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 30(x^4 - x^5) \, \mathrm{d}x \\
&= \left[6x^5 - 5x^6 \right]_0^1 = 1.
\end{aligned}$$

5. Határozza meg a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$$

hatványsor konvergenciasugarát.

Megoldás. A konvergenciasugár meghatározásához használjuk a Cauchy–Hadamard-tételt: ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ konvergenciasugara R, akkor

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Most létezik határérték is:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left| \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \right|} = \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e},$$

tehát a konvegenciasugár e.