Matematika A2c vizsga – 2018. január 19.

Elmélet (5×2p)

1. Definiálja a lineáris egyenletrendszerek kibővített mátrixát.

   Megoldás. Az

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2} + \dots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2} + \dots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2} + \dots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

   lineárisegyenletrendszer kibővített mátrixa

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} & b_m \end{bmatrix}$$

2. Mit nevezünk lineáris differenciálegyenletnek?

   Megoldás. Lineáris differenciálegyenletnek nevezzük az $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ alakú egyenleteket, ahol $a_0, \dots, a_n, b$ adott függvények.

3. Adjon szükséges feltételt differenciálható többváltozós függvény lokális szélsőértékének létezésére az $\mathbf{x}_0$ pontban.

   Megoldás. Ha az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény differenciálható és az $\mathbf{x}_0$ pontban lokális szélsőértéke van, akkor $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = 0$.

4. Mondja ki a Fubini-tétel téglalapra vonatkozó változatát.

   Megoldás. Ha $A = [a, b] \times [c, d]$ és $f : A \to \mathbb{R}$ folytonos, akkor $\displaystyle\int_A f \, \mathrm{d}A = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$.

5. Mondja ki a Cauchy–Hadamard-tételt.

   Megoldás. A $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ hatványsor konvergenciasugara $R = \dfrac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Feladatok (5×10p)

1. Adja meg a c paraméter értékét úgy, hogy az

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 6 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 &= 0 \\ 2x_1 - x_3 + 3x_4 &= c \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= -6 \end{aligned}$$

   egyenletrendszernek létezzen megoldása. Oldja is meg az egyenletrendszert ezen c érték mellett.

   Megoldás. Végezzünk Gauss-eliminációt a kibővített mátrixon:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 3 & c \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -6 \end{array}\right] \underset{\substack{s_2 - s_1 \\ s_3 - 2s_1 \\ s_4 + s_1}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & -4 & 3 & 3 & -12 + c \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{s_3 - 4s_2 \\ s_4 + s_2}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 12 + c \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -6 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{s_2 \cdot (-1) \\ s_4 / (-2)}}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 12 + c \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{s_3 \leftrightarrow s_4}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 & 7 & 12 + c \end{array}\right] \underset{s_4 - 7s_3}{\sim} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c - 9 \end{array}\right].$$

   Ha $c \neq 9$, akkor az utolsó sor miatt nincs megoldás. Ha viszont $c = 9$, akkor az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangja is 3, tehát létezik megoldás. A lépcsős alakból leolvashatjuk, hogy pl. az utolsó ismeretlen szabadon megválasztható. A megoldás $x_4 = t$, $x_3 = 3 - t$, $x_2 = 3$, $x_1 = 6 - 2t$.

2. Határozza meg az $y'' + 5y' + 4y = \cos x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

Megoldás. Az egyenlet inhomogén lineáris állandó együtthatós, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda + 4)(\lambda + 1)$, tehát a gyökök -4 és -1. A homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-4x} + Be^{-x}$.

Az inhomogén tag trigonometrikus, nincs külső rezonancia, tehát kereshetünk $y(x) = C\cos x + D\sin x$ alakú megoldást. Ezt az egyenletbe helyettesítve

$$-C\cos x - D\sin x + 5(-C\sin x + D\cos x) + 4(C\cos x + D\sin x) = \cos x$$

adódik, ami akkor teljesül minden x értékre, ha $3C + 5D = 1$ és $3D - 5C = 0$, azaz $C = \frac{3}{34}$ és $D = \frac{5}{34}$. Tehát a differenciálegyenlet általános megoldása $y(x) = \frac{3}{34}\cos x + \frac{5}{34}\sin x + Ae^{-4x} + Be^{-x}$.

3. Határozza meg az $f(x, y) = (x^2 + y^2)(1 + x)$ függvény minimumát és maximumát az $x^2 + y^2 \leq 1$ körlapon.

Megoldás. A függvény differenciálható, szélsőérték előfordulhat a tartomány beljesében a gradiens zérushelyeinél vagy a peremen. A gradiens komponensfüggvényei

$$f'_x(x, y) = 2x(1 + x) + (x^2 + y^2)$$
$$f'_y(x, y) = 2y(1 + x).$$

A második akkor 0, ha $y = 0$ vagy $x = -1$. Az előbbi esetben az első komponens eltűnésének feltétele $3x^2 + 2x = 0$, azaz $x = 0$ vagy $x = -2/3$. Ha viszont $x = -1$, akkor az első komponens első tagja is 0, vagyis az $x^2 + y^2$ tagnak is el kellene tűnnie, de ez csak az $x = y = 0$ pontban történik, ami ellentmondás. Tehát két stacionárius pont van: $(0, 0)$ és $(-2/3, 0)$. Meg lehetne vizsgálni a Hesse-mátrixot, de mivel úgyis össze kell hasonlítani a függvényértékeket a peremen talált szélsőértékekkel, egyszerűbb most azokat kiszámolni: $f(0, 0) = 0$ és $f(-2/3, 0) = \frac{4}{27}$.

A peremet paraméterezzük $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ módon, ekkor

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x(t), y(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos^2 t + \sin^2 t)(1 + \cos t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1 + \cos t) = -\sin t,$$

ennek zérushelyei $t = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, ami az $(x(0), y(0)) = (1, 0)$ és $(x(\pi), y(\pi)) = (-1, 0)$ pontoknak felel meg. Itt a függvényértékek $f(1, 0) = 2$ és $f(-1, 0) = 0$. Tehát a körlapon a maximum 2, a minimum pedig 0.

4. Integrálja az $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ függvényt a $V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x \geq 0\right\}$ tartományon.

Megoldás. A megadott tartomány két origó középpontú félgömbfelület és a közös határolósíkjuk közötti rész, tehát érdemes gömbi koordinátákat használni az integráláshoz:

$$x(r, \vartheta, \varphi) = r\sin\vartheta\cos\varphi$$
$$y(r, \vartheta, \varphi) = r\sin\vartheta\sin\varphi$$
$$z(r, \vartheta, \varphi) = r\cos\vartheta,$$

a Jacobi-determináns $r^2\sin\vartheta$, a paramétertartomány $[1, 2] \times [0, \pi] \times [-\pi/2, \pi/2]$. A függvényérték

$$f(x(r, \vartheta, \varphi), y(r, \vartheta, \varphi), z(r, \vartheta, \varphi)) = r\sin\vartheta.$$

Az integrál tehát

$$\begin{aligned}
\int_V f \,\mathrm{d}V &= \int_1^2 \int_0^\pi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r\sin\vartheta \cdot r^2\sin^2\vartheta \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\vartheta \,\mathrm{d}r \\
&= \pi \int_1^2 r^3 \,\mathrm{d}r \int_0^\pi \sin^2\vartheta \,\mathrm{d}\vartheta \\
&= \pi \int_1^2 r^3 \,\mathrm{d}r \int_0^\pi \left(\frac{1 - \cos 2\vartheta}{2}\right) \mathrm{d}\vartheta \\
&= \pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 \left[\frac{\vartheta}{2} - \frac{\sin 2\vartheta}{4}\right]_0^\pi = \pi\frac{16 - 1}{4}\frac{\pi}{2} = \frac{15}{8}\pi^2.
\end{aligned}$$

5. Határozza meg az $f(x) = \frac{x^4}{7 - x^3}$ függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát.

Megoldás. A mértani sor összegéből indulunk ki: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q}$ ha $|q| < 1$. A nevezőből 7 kiemelése után $q = \frac{x^3}{7}$ értékkel használhatjuk ezt az összefüggést, ennek alapján

$$f(x) = \frac{x^4}{7 - x^3} = \frac{x^4}{7}\frac{1}{1 - \frac{x^3}{7}} = \frac{x^4}{7}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^3}{7}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 7^{-(n+1)} x^{3n+4}.$$