Matematika A2c első PPZH – 2017. december 13.

Elmélet $(2\mathrm{p}+3\mathrm{p})$

1. Definiálja a mátrixok determinánsának fogalmát.

   Megoldás. Determinánsnak nevezzük azt a négyezes mátrixokon értelmezett egyértelmű függvényt, amelyre az alábbi tulajdonságok teljesülnek:

   1. minden oszlopban lineáris
   2. két oszlop felcserélésekor előjelet vált
   3. az egységmátrixokon az 1 értéket veszi fel.

2. Mondja ki a Picard–Lindelöf-tételt.

   Megoldás. Tegyük fel, hogy $D \subseteq \mathbb{R}^2$, az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és második változójában Lipschitz-folytonos. Ekkor az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenletnek minden $(x_0, y_0) \in D$ belső pont esetén létezik és egyértelmű az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása.

Feladatok $(3 \times 5\mathrm{p})$

1. Határozza meg a $\mathbf{v} = (-3, 10, 10) \in \mathbb{R}^3$ vektor koordinátáit a $(2, 3, 1)$, $(-3, 1, 2)$, $(2, 1, 2)$ vektorokból álló bázisban.

   Megoldás. Az $\alpha(2, 3, 1)+\beta(-3, 1, 2)+\gamma(2, 1, 2) = (1, 5, 5)$ vektoregyenletet kell megoldani. Ezt megtehetjük például Gauss-eliminációval. A kibővített mátrixon elemi sorműveleteket végzünk:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 2 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 2 & 10 \end{array}\right] \overset{s_1 \leftrightarrow s_3}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 10 \\ 3 & 1 & 1 & 10 \\ 2 & -3 & 2 & -3 \end{array}\right] \overset{\substack{s_2-3s_1 \\ s_3-2s_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & -5 & -5 & -20 \\ 0 & -7 & -2 & -23 \end{array}\right]$$

$$\overset{s_2\cdot(-\frac{1}{5})}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -2 & -23 \end{array}\right] \overset{s_3+7s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{array}\right]$$

   Ez már lépcsős alak, tehát a megoldást alulról felfelé haladva leolvashatjuk: a koordináták $\gamma = 1$, $\beta = 3$, $\alpha = 2$.

2. Legyen T_1 a tér elforgatása a z tengely körül $\pi/4$ szöggel, T_2 pedig az $x = z$ egyenletű síkra való tükrözés. Írja fel a T_1, T_2 és $T_2 \circ T_1$ lineáris transzformációk mátrixát a tér szokásos bázisára nézve.

   Megoldás. A T_1 transzformáció a bázisvektorokat így forgatja el:

$$\begin{aligned} T_1(1,0,0) &= (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \\ T_1(0,1,0) &= (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \\ T_1(0,0,1) &= (0,0,1), \end{aligned}$$

   tehát a mátrixa

$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   A T_2 transzformáció a bázisvektorokat a következő vektorokba viszi:

$$\begin{aligned} T_2(1,0,0) &= (0,0,1) \\ T_2(0,1,0) &= (0,1,0) \\ T_2(0,0,1) &= (1,0,0), \end{aligned}$$

   tehát a mátrixa

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   A $T_2 \circ T_1$ kompozíció mátrixa $M_2 \cdot M_1$, amit mátrixszorzással számolhatunk:

$$M_2 \cdot M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Oldja meg az $y' - 2x = 2xy$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet szétválasztható:

$$\frac{y'}{y+1} = 2x,$$

mindkét oldalt integrálva

$$\ln|y+1| = x^2 + C,$$

tehát az általános megoldás $y(x) = Ce^{x^2} - 1$.
A kezdeti feltétel alapján $0 = y(0) = C - 1$, tehát $C = 1$. A kezdetiérték-probléma megoldása tehát $y(x) = e^{x^2} - 1$.