Matematika A2c második PPZH – 2017. december 13.

Elmélet (2p + 3p)

1. Definiálja az állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek karakterisztikus polinomját.

   Megoldás. Az $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ differenciálegyenlet karakterisztikus polinomja az $a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ polinom.

2. Adjon elégséges feltételt kétszer differenciálható függvény lokális szélsőértékének létezésére.

   Megoldás. Ha az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény kétszer differenciálható, $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = 0$ és a $H(\mathbf{x}_0)$ Hesse-mátrix pozitív definit (negatív definit), akkor a függvénynek az $\mathbf{x}_0$ pontban lokális minimuma (lokális maximuma) van.

Feladatok (3×5p)

1. Oldja meg Laplace-transzformáció segítségével az

$$\begin{aligned} x' &= -2x + 6y \\ y' &= -2x + 5y \end{aligned}$$

   differenciálegyenlet-rendszert $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett. (Az $f(t) = e^{-\alpha t}$ függvény Laplace-transzformáltja $(\mathcal{L}f)(z) = \frac{1}{z-\alpha}$.)

   Megoldás. Legyen $X = \mathcal{L}x$ és $Y = \mathcal{L}y$ a megoldás Laplace-transzformáltja, ekkor a kezdeti feltétel alapján $(\mathcal{L}x')(z) = zX(z)$ és $(\mathcal{L}y')(z) = zY(z) - 1$. Az egyenletrendszer mindkét egyenletének mindkét oldalát Laplace-transzformáljuk:

$$\begin{aligned} zX(z) &= -2X(z) + 6Y(z) \\ zY(z) - 1 &= -2X(z) + 5Y(z) \end{aligned}$$

   Az első egyenletből $Y(z) = \frac{z+2}{6}X(z)$, ezt beírjuk a második egyenletbe:

$$z\frac{z+2}{6}X(z) - 1 = -2X(z) + 5\frac{z+2}{6}X(z),$$

   tehát

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{6}{z^2 - 3z + 2} = -6\frac{1}{z-1} + 6\frac{1}{z-2} \\ Y(z) &= \frac{z+2}{z^2 - 3z + 2} = -3\frac{1}{z-1} + 4\frac{1}{z-2}. \end{aligned}$$

   A kezdetiérték-probléma megoldása ezek inverz Laplace-transzformáltja:

$$\begin{aligned} x(t) &= -6e^t + 6e^{2t} \\ x(t) &= -3e^t + 4e^{2t}. \end{aligned}$$

2. Adja meg a c paraméter értékét úgy, hogy az

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ c & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   függvény folytonos legyen.

   Megoldás. A paramétert úgy kell megválasztani, hogy a függvény origóbeli határértékével legyen egyenlő. f két függvény kompozíciójaként írható, a belső $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$, ez az origóban folytonos és határértéke 0. A külső függvény $t \mapsto \frac{e^t-1}{t}$, ennek határértéke a 0 pontban

$$\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1.$$

   Tehát $c = 1$ választás mellett lesz f folytonos.

3. Differenciálható-e (totálisan) az $f(x, y) = 4x\sin(xy) + x^4 y + x^2$ függvény a $P = (1, \pi)$ pontban? Adja meg ebben a pontban a függvény gradiensét és $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ irányú iránymenti deriváltját.

Megoldás. A parciális deriváltak

$$f'_x(x,y) = 4\sin(xy) + 4x\cos(xy)y + 4x^3y + 2x$$
$$f'_y(x,y) = 4x^2\cos(xy) + x^4,$$

mindkettő folytonos, tehát f totálisan differenciálható. A gradiens komponensei éppen a parciális deriváltak:

$$\operatorname{grad} f(1,\pi) = f'_x(1,\pi)\mathbf{i} + f'_y(1,\pi)\mathbf{j} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j},$$

az iránymenti derivált

$$\frac{\operatorname{grad} f(1,\pi)\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{2\cdot 2 + (-3)\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{5}}.$$