Matematika A2c második PPZH – 2017. december 13.
Minden feladatnál indokoljon részletesen, indoklás nélkül közölt eredmény nem fogadható el.

Elmélet (2p + 3p)

1. Definiálja az állandó együtthatós lineáris differenciálegyenletek karakterisztikus polinomját.
2. Adjon elégséges feltételt kétszer differenciálható függvény lokális szélsőértékének létezésére.

Feladatok (3×5p)

1. Oldja meg Laplace-transzformáció segítségével az
$$\begin{aligned} x' &= -2x + 6y \\ y' &= -2x + 5y \end{aligned}$$
differenciálegyenlet-rendszert $x(0) = 0$, $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett. (Az $f(t) = e^{-\alpha t}$ függvény Laplace-transzformáltja $(\mathcal{L}f)(z) = \frac{1}{z-\alpha}$.)
2. Adja meg a c paraméter értékét úgy, hogy az
$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ c & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$
függvény folytonos legyen.
3. Differenciálható-e (totálisan) az $f(x,y) = 4x\sin(xy) + x^4y + x^2$ függvény a $P = (1,\pi)$ pontban? Adja meg ebben a pontban a függvény gradiensét és $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ irányú iránymenti deriváltját.