Matematika A2c első PZH – 2017. december 4.

Elmélet (2p + 3p)

1. Definiálja a mátrixok oszloprangjának fogalmát.

   Megoldás. Egy mátrix oszloprangja az oszlopvektorai által generált altér dimenziója.

2. Definiálja a lineáris transzformációk sajátértékének és sajátvektorának fogalmát.

   Megoldás. Legyen V vektortér a K test felett. Az $L : V \to V$ lineáris transzformációnak a $v \in V$ vektor sajátvektora $\lambda \in K$ sajátértékkel, ha $v \neq 0$ és $L(v) = \lambda v$.

Feladatok (3×5p)

1. A Cramer-szabály segítségével számolja ki az x_3 ismeretlen értékét, ha az

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 &= 4 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ x_1 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

   egyenletrendszer teljesül.

   Megoldás. Jelölje A az együtthatómátrixot, $\mathbf{b}$ a jobb oldalakból álló oszlopvektort, A_3 pedig azt a mátrixot, amit A-ból a harmadik oszlop $\mathbf{b}$-re cserélésével kapunk. Ekkor a Cramer-szabály szerint

$$x_3 = \frac{\det A_3}{\det A}.$$

   A két determinánst legegyszerűbben elemi sor- illetve oszlopműveletek és sor illetve oszlop szerinti kifejtések alkalmazásával számolhatjuk ki:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

   és

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

   tehát $x_3 = -1$.

2. Az L lineáris leképezés mátrixa $\mathbb{R}^3$ standard bázisában

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

   Mi L mátrixa az $(1, 1, 0), (1, 2, 0), (-1, -2, 1)$ bázisban?

   Megoldás. Bázistranszformációt lehet alkalmazni: ha S jelöli azt a mátrixot, aminek oszlopai a megadott új bázis koordinátái a standard bázisra nézve, akkor az új bázisban M mátrixa $S^{-1}MS$. S inverzét kiszámolhatjuk például Gauss-eliminációval:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_2 - s_1}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{s_1 + s_3 \\ s_2 + s_3}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{s_1 - s_2}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

   Ezt felhasználva

$$S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Határozza meg az $y' = (x-y)^2$ differenciálegyenlet általános megoldását $u = x - y$ helyettesítéssel.

Megoldás. A megadott helyettesítést használva $u' = 1 - y' = 1 - (x-y)^2 = 1 - u^2$, ami szétválasztható egyenlet.

$$\frac{u'}{1-u^2} = 1$$

mindkét oldalát integrálni kell:

$$\begin{aligned} x + C &= \int 1 \,\mathrm{d}x = \int \frac{u'}{1-u^2} \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1-u^2} \,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{(1-u)(1+u)} \,\mathrm{d}u \\ &= \int \left(\frac{1}{2} \frac{1}{u+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{u-1} \right) \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \ln |u+1| - \frac{1}{2} \ln |u-1| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{u+1}{u-1} \right|. \end{aligned}$$

Ebből $u(x)$, majd $y(x) = x + u(x)$ alapján az általános megoldás kifejezhető:

$$y(x) = x + \frac{e^{2(x+C)} + 1}{e^{2(x+C)} - 1}.$$