Matematika A2c második PZH – 2017. december 4.

Elmélet (2p + 3p)

1. Mondja ki a homogén lineáris differenciálegyenlet megoldáshalmazáról szóló tételt.

   Megoldás. n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenlet lokális megoldásai n dimenziós vektorteret alkotnak.

2. Definiálja a többváltozós függvények folytonosságát.

   Megoldás. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $\mathbf{x}_0$ pontban, ha $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)| \leq \epsilon$.

Feladatok (3 × 5p)

1. Határozza meg az $(1 + x^2)y' - 2xy = 1 + x^2$ differenciálegyenlet általános megoldását.

   Megoldás. Az egyenlet inhomogén lineáris, először a hozzá tartozó homogén egyenletet oldjuk meg: $(1 + x^2)y' - 2xy = 0$. Ez szétválasztható, átrendezve

   $$\frac{y'}{y} = \frac{2x}{1+x^2},$$

   mindkét oldalt integráljuk:

   $$\ln|y(x)| = \ln(1 + x^2) + C,$$

   tehát $y(x) = C(1 + x^2)$.
   Az inhomogén egyenlet megoldását az állandók variálásának módszerével lehet meghatározni: az $y(x) = c(x)(1 + x^2)$ függvényt az inhomogén egyenletbe helyettesítjük. $y'(x) = c'(x)(1 + x^2) + c(x) \cdot 2x$ felhasználásával

   $$(1 + x^2)c'(x)(1 + x^2) = 1 + x^2,$$

   tehát

   $$c(x) = \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x.$$

   Az általános megoldás $y(x) = (1 + x^2)\arctan x + C(1 + x^2)$.

2. Létezik-e a

   $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy + x^2 + 15y^4}{3x^2 + 7y^2}$$

   függvényhatárérték? Ha igen, számítsa ki.

   Megoldás. Vizsgáljuk a függvényt az $y = mx$ egyenesek mentén, ahol $m \in \mathbb{R}$ paraméter:

   $$\lim_{x\to 0} \frac{2mx^2 + x^2 + 15m^4x^4}{3x^2 + 7m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2m + 1 + 15m^4x^2}{3 + 7m^2} = \frac{2m+1}{3+7m^2}$$

   A kapott kifejezés függ m értékétől, ez nem fordulhatna elő, ha létezne a kétváltozós függvénynek határértéke az origóban. Tehát a kérdéses határérték nem létezik.

3. Határozza meg az $f(x, y) = x^4 - 2x^2 - 2y^2$ függvény maximumát és minimumát az $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$ tartományon.

   Megoldás. A függvény folytonos, a megadott tartomány korlátos és zárt (zárt körlap), tehát létezik minimum és maximum is. Lokális szélsőérték lehet a tartomány belsejében vagy a peremen. Belül a gradiens zérushelyei közül kerülnek ki, ennek komponensfüggvényei

   $$f'_x(x, y) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$$
   $$f'_y(x, y) = -4y$$

   A két derivált a tartomány belsejében csak a $(0, 0)$ pontban tűnik el egyszerre. A Hesse-mátrix

   $$H(x, y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x, y) & f''_{xy}(x, y) \\ f''_{yx}(x, y) & f''_{yy}(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12x^2 - 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix},$$

ez az origóban negatív definit, tehát itt lokális maximum van.
A függvényt a peremen annak egy paraméterezését használva vizsgálhatjuk. $x(t) = \cos t$, $y(t) = \sin t$ behelyettesítésével a $t \mapsto \cos^4 x - 2\cos^2 x - 2\sin^2 x = \cos^4 x - 2$ függvényt kapjuk. A derivált $-4\cos^3 x \sin x$, ennek zérushelyei $k\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Mindegyiknél előjelet vált a derivált, π többszöröseinél lokális maximum van, a többi stacionárius pontban lokális minimum.
Tehát a függvény maximumát a megadott tartományon a $(0, 0)$, $(\pm 1, 0)$ pontok valamelyikében veszi fel, a minimum lehetséges helyei pedig $(0, \pm 1)$. A függvényértékek: $f(0, 0) = 0$, $f(\pm 1, 0) = -1$, tehát a maximum -1, $f(0, \pm 1) = -2$, tehát a minimum -2.