Matematika A2c első ZH – 2017. október 10.

Elmélet (2p + 3p)

1. Definiálja a lineáris függetlenség fogalmát. Adjon példát az egyváltozós polinomok vektorterében négy vektorból álló lineárisan független rendszerre.

   Megoldás. A $v_1, \dots, v_k \in V$ vektorok lineárisan függetlenek, ha $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k = 0$ csak $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$ módon teljesül. Példa: $1, x, x^2, x^3$.

2. Mondja ki a lineáris leképezések kompozíciójának mátrixáról szóló tételt.

   Megoldás. Ha $L_1 : V_1 \to V_2$ és $L_2 : V_2 \to V_3$ lineáris leképezések, B_1, B_2, B_3 a V_1, V_2, V_3 vektorterek egy-egy bázisa, L_1 mátrixa a B_1, B_2 bázisokra nézve M_1 és L_2 mátrixa a B_2, B_3 bázisokra nézve M_2, akkor az $L_2 \circ L_1$ lineáris leképezés mátrixa a B_1, B_3 bázisokra nézve $M_2 M_1$.

Feladatok (3×5p)

1. Állapítsa meg, hogy a megadott egyenletrendszernek hány megoldása van az u, v valós paraméterek függvényében.

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= -1 \\ -2x_1 - 2x_2 + ux_3 &= -6 \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= v \end{aligned}$$

   Megoldás. Végezzünk Gauss-eliminációt a kibővített mátrixon:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & u & -6 \\ 2 & 4 & 3 & v \end{array}\right] \overset{\substack{s_2-s_1 \\ s_3+2s_1 \\ s_4-2s_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 4 & 4+u & -4 \\ 0 & -2 & -1 & -2+v \end{array}\right] \overset{\substack{s_3-2s_2 \\ s_4+s_2}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2+u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4+v \end{array}\right]$$

   A paraméterértékektől függően az utolsó két sor között lehet csupa 0, de ezt elhagyva már lépcsős alakban van a mátrix, tehát leolvashatjuk az együtthatómátrix és a kibővített mátrix rangját.
   Az együtthatómátrix rangja 2 ha $u = -2$, egyébként 3. A kibővített mátrix rangja 2, ha $u = -2$ és $v = 4$, 4, ha $u \neq -3$ és $v \neq 4$, egyébként 3. Tehát ha $v \neq 4$, akkor nincs megoldás, ha $v = 4$ és $u \neq -2$, akkor pontosan egy megoldás van, ha viszont $v = 4$ és $u = -2$, akkor végtelen sok megoldás van.

2. Határozza meg az

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

   mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.
   Megoldás. $A - \lambda I$ determinánsát az első sor szerinti kifejtéssel érdemes kiszámítani:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & 3-\lambda & -2 \\ 4 & 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (-1-\lambda)\left((3-\lambda)(-3-\lambda) - (-2)\cdot 4\right) = (-1-\lambda)(-9+\lambda^2+8) = -(\lambda+1)^2(\lambda-1),$$

   tehát a sajátértékek $\lambda = 1$ (egyszeres) és $\lambda = -1$ (kétszeres).
   A $\lambda = 1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \overset{\substack{s_2+2s_1 \\ s_3+2s_1}}{\sim} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \overset{s_3-2s_2}{\sim} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \overset{\substack{-\frac{1}{2}s_1 \\ \frac{1}{2}s_2}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

   alapján $\begin{bmatrix} 0 & t & t \end{bmatrix}^T$, $t \neq 0$.
   A $\lambda = -1$ sajátértékhez tartozó sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

   alapján $\begin{bmatrix} -s + \frac{1}{2}t & s & t \end{bmatrix}^T$, ahol $ts \neq 0$.

3. Határozza meg az $e^{3x}y' = y^2 + 2y + 1$ differenciálegyenlet általános megoldását. Oldja meg az egyenletet $y(0) = 2$ és $y(-5) = -1$ kezdeti feltételek mellett is.

   Megoldás. Az egyenlet szétválasztható, átrendezve

$$\frac{y'}{(y+1)^2} = e^{-3x},$$

   ennek mindkét oldalát integráljuk:

$$\int \frac{y'}{(y+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int (y+1)^{-2}\,\mathrm{d}y = -(y+1)^{-1} = -\frac{1}{3}e^{-3x} + C,$$

   amiből az általános megoldás

$$y(x) = \frac{1}{\frac{1}{3}e^{-3x} + C} - 1.$$

   Az $y(0) = 2$ kezdeti feltétel akkor teljesül, ha

$$2 = \frac{1}{\frac{1}{3} + C} - 1,$$

   azaz $C = 0$, tehát a megoldás $y(x) = 3e^{3x} - 1$.
   Az $y(-5) = -1$ kezdeti feltételt nem lehet az általános megoldásból C megválasztásával teljesíteni. Ennek az az oka, hogy az átrendezéskor elosztottuk az egyenletet az $(y+1)^2$ tényezővel, ami $y = -1$ esetén 0. Az eredeti egyenlet jobb oldala 0, ha $y = -1$, tehát az $y(x) = -1$ konstans függvény oldja meg $y(-5) = -1$ kezdeti feltételek mellett.