Matematika A2c második ZH – 2017. november 22.

Elmélet (2p + 3p)

1. Definiálja két függvény konvolúciójának fogalmát.

   Megoldás. Az $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvények konvolúciója az $(f * g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)\,\mathrm{d}s$ képlettel definiált függvény.

2. Mondja ki a többváltozós függvényekre vonatkozó láncszabályt.

   Megoldás. Ha $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differenciálható az $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontban és $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ differenciálható az $f(\mathbf{x}_0)$ pontban, akkor $g \circ f$ is differenciálható az $\mathbf{x}_0$ pontban, és $D_{\mathbf{x}_0}(g \circ f) = (D_{f(\mathbf{x}_0)}g)(D_{\mathbf{x}_0}f)$.

Feladatok (3 × 5p)

1. Oldja meg az $y'' + 5y' + 6y = e^{-2x}$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett. (A feladat megoldható Laplace-transzformációval is, de más módszert is válaszhat. Az $f(x) = x^n e^{\alpha x}$ függvény Laplace-transzformáltja $\dfrac{n!}{(z-\alpha)^{n+1}}$.)

   Megoldás. Az egyenlet inhomogén lineáris, először az $y'' + 5y' + 6y = 0$ homogén egyenletet oldjuk meg. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3)$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $Ae^{-2x} + Be^{-3x}$.
   Külső rezonancia van, -2 a karakterisztikus polinomnak egyszeres gyöke, tehát az inhomogén egyenlet megoldását $y(x) = Cxe^{-2x}$ alakban keressük. Ennek deriváltjai

   $$\begin{aligned} y'(x) &= Ce^{-2x} - 2Cxe^{-2x} \\ y''(x) &= -4Ce^{-2x} + 4Cxe^{-2x}. \end{aligned}$$

   Az egyenletbe helyettesítés után

   $$Ce^{-2x} = e^{-2x},$$

   adódik, ez akkor teljesül minden x értékre, ha $C = 1$. Az általános megoldás és deriváltja

   $$\begin{aligned} y(x) &= xe^{-2x} + Ae^{-2x} + Be^{-3x} \\ y'(x) &= e^{-2x} + xe^{-2x} - 2Ae^{-2x} - 3Be^{-3x}, \end{aligned}$$

   a kezdeti feltétel alapján

   $$\begin{aligned} 1 &= y(0) = A + B \\ 0 &= y'(0) = 1 - 2A - 3B, \end{aligned}$$

   tehát $A = 2$ és $B = -1$, a keresett megoldás $y(x) = xe^{-2x} + 2e^{-2x} - e^{-3x}$.
   Megoldás Laplace-transzformációval: legyen $\mathcal{L}y = Y$ a keresett megoldás Laplace-transzformáltja, ekkor $(\mathcal{L}y')(z) = zY(z) - 1$ és $(\mathcal{L}y'')(z) = z^2Y(z) - z$. Az egyenlet mindkét oldalát Laplace-transzformáljuk:

   $$z^2Y(z) - z + 5zY(z) - 5 + 6Y(z) = \frac{1}{z+2},$$

   amiből

   $$Y(z) = \frac{z + 5 + \frac{1}{z+2}}{z^2 + 5z + 6} = \frac{z^2 + 7z + 11}{(z+2)^2(z+3)} = \frac{A}{(z+2)^2} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{z+3}.$$

   A parciális törtek együtthatóit meg kell határozni:

   $$\begin{aligned} z^2 + 7z + 11 &= A(z+3) + B(z+2)(z+3) + C(z+2)^2 \\ &= (B + C)z^2 + (A + 5B + 4C)z + (3A + 6B + 4C) \end{aligned}$$

   alapján

   $$\begin{aligned} 1 &= B + C \\ 7 &= A + 5B + 4C \\ 11 &= 3A + 6B + 4C. \end{aligned}$$

   Az egyenletrendszer megoldása $A = 1$, $B = 2$, $C = -1$, tehát

   $$Y(z) = \frac{1}{(z+2)^2} + 2\frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3}.$$

   A megoldás ennek az inverz Laplace-transzformáltja, azaz $y(x) = xe^{-2x} + 2e^{-2x} - e^{-3x}$.

2. Adja meg c értékét úgy, hogy az

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy \sin x}{x^2+y^2} & \text{ha } (x,y) \neq 0 \\ c & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény minden pontban folytonos legyen.

Megoldás. f két folytonos függvény hányadosa, az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ halmazon a nevező nem 0, tehát itt folytonos. Ahhoz, hogy az origóban is folytonos legyen, c értékét a függvény $(0,0)$ pontbeli határértékének kell választani. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$, tehát $(x,y) \neq (0,0)$ esetén

$$\left| \frac{xy \sin x}{x^2+y^2} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{2xy}{x^2+y^2} \right| |\sin x| \leq \frac{|\sin x|}{2}.$$

A kapott felső korlát folytonos, tehát a $(0,0)$ pontban a határérték a helyettesítési értékkel egyenlő, azaz 0. Ebből következik, hogy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy \sin x}{x^2+y^2} = 0,$$

hiszen a függvény $-\frac{|\sin x|}{2}$ és $\frac{|\sin x|}{2}$ között van. Tehát $c = 0$ értéket kell választani.

3. Határozza meg az $f(x,y) = x^3 + xy - x + y^2 - 2y$ függvény lokális szélsőértékeit.

Megoldás. A függvény differenciálható, tehát lokális szélsőérték a gradiens zérushelyeinél fordulhat elő. A komponensek:

$$f'_x(x,y) = 3x^2 + y - 1$$
$$f'_y(x,y) = x + 2y - 2.$$

Az $f'_y(x,y) = 0$ egyenletből $y = 1 - \frac{x}{2}$, ezt a másik komponensre vonatkozó egyenletbe írjuk:

$$0 = 3x^2 + 1 - \frac{x}{2} - 1 = \frac{1}{2}x(6x - 1),$$

a zérushelyek tehát $(0,1)$ és $(\frac{1}{6}, \frac{11}{12})$.
A Hesse-mátrix

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} f''_{xx}(x,y) & f''_{xy}(x,y) \\ f''_{yx}(x,y) & f''_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A $(0,0)$ pontban a determináns $0 \cdot 2 - 1^2 = -1 < 0$, tehát itt nyeregpont van. Az $(\frac{1}{6}, \frac{11}{12})$ pontban a determináns $1 \cdot 2 - 1^2 = 1 > 0$, tehát itt lokális szélsőérték van, a főátló elemei pozitívak, tehát lokális minimumhely, az értéke $f(\frac{1}{6}, \frac{11}{12}) = -\frac{433}{432}$.