A zárthelyiken és a vizsgákon előforduló elméleti kérdésekhez az itt felsorolt fogalmak definícióját illetve tételeket kell tudni kimondani. Az első ZH (PZH, PPZH) anyaga az 1. és 2. szakasz, a második ZH (PZH, PPZH) anyaga a 3. és 4. szakasz, a vizsgák anyaga az összes szakasz. **Figyelem**: Az itt kimondott definíciók és tételek tájékoztató jellegűek, és a felkészülés segítését szolgálják. Természetesen törekedtem a pontosságra, de előfordulhatnak hibák, amiből nem következik, hogy a dolgozatokban ugyanezeket a hibákat (vagy másféléket) el szabad követni. (Frissítve: 2017. november 27.)

1. Lineáris algebra

Definíciók

- test

  Definíció. Egy K halmaz a $+ : K \times K \to K$ és $\cdot : K \times K \to K$ műveletekkel test, ha az alábbi tulajdonságok teljesülnek:
  1. $+$ asszociatív és kommutatív
  2. létezik $0 \in K$, amire $\forall a \in K : a + 0 = a$ (nullelem)
  3. minden $a \in K$ elemhez létezik $-a \in K$, amire $a + (-a) = 0$ (additív inverz)
  4. $\cdot$ asszociatív és kommutatív
  5. létezik $1 \in K$, amire $\forall a \in K : a \cdot 1 = a$ (egységelem)
  6. minden $a \in K \setminus \{0\}$ elemhez létezik $a^{-1} \in K$, amire $a \cdot a^{-1} = 1$ (multiplikatív inverz)
  7. $0 \neq 1$
  8. minden $a, b, c \in K$ elemre $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$

- vektortér

  Definíció. Legyen K test. A V halmaz a $+ : V \times V \to V$ és $\cdot : K \times V \to V$ műveletekkel K feletti vektortér, ha az alábbi tulajdonságok teljesülnek:
  1. $+$ asszociatív és kommutatív
  2. létezik $0 \in V$, amire $\forall v \in V : v + 0 = v$ (nullelem)
  3. minden $v \in V$ elemhez létezik $-v \in V$, amire $v + (-v) = 0$ (additív inverz)
  4. ha $\alpha, \beta \in K$ és $v \in V$, akkor $(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$
  5. ha $v \in V$, akkor $1 \cdot v = v$
  6. ha $\alpha, \beta \in K$ és $v \in V$, akkor $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$
  7. ha $\alpha \in K$ és $v, w \in V$, akkor $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$

- altér

  Definíció. A V K feletti vektortérnek a $W \subseteq V$ részhalmaz altere, ha $v, w \in W$ esetén $v + w \in W$ és $\alpha \in K$, $v \in W$ esetén $\alpha \cdot v \in W$.

- lineáris kombináció

  Definíció. A $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vektorok $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ együtthatókkal vett lineáris kombinációja $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k$.

- generált altér

  Definíció. A V vektortér $S \subseteq V$ részhalmaza által generált ér az S-beli vektorok összes lineáris kombinációinak halmaza.

- generátorrendszer

  Definíció. A V vektortér S részhalmaza generátorrendszer, ha az általa generált altér V.

- lineáris függetlenség

Definíció. A $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ vektorok lineárisan függetlenek, ha $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots \alpha_k v_k = 0$ csak $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$ esetén teljesülhet.

- bázis

  Definíció. A V vektortér B részhalmaza bázis, ha lineárisan független generátorrendszer.

- dimenzió

  Definíció. Ha B a V vektortér egy tetszőleges bázisa, akkor $|B|$ a V dimenziója.

- $m \times n$ mátrix

  Definíció. Egy m sorból és n oszlopból álló számtáblázatot $m \times n$ méretű mátrixnak nevezzük.

- főátló

  Definíció. Egy mátrix főátlója azon elemekből áll, amelyek sor- és oszlopindexe megegyezik.

- transzponált

  Definíció. Egy $m \times n$ méretű mátrix transzponáltja az az $n \times m$ méretű mátrix, aminek i. sorában a j. elem megegyezik az eredeti mátrix j. sorának i. elemével.

- mátrixszorzás

  Definíció. Az

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \text{ és } B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,1} & \cdots & b_{1,l} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,l} \end{bmatrix}$$

  mátrixok szorzata

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,1} & \cdots & c_{1,l} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \cdots & c_{2,l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \cdots & c_{m,l} \end{bmatrix}$$

  ahol $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$.

- egységmátrix

  Definíció. Az egységmátrixok olyan négyzetes mátrixok, amelyeknek a főátlójában csupa 1, azon kívül csupa 0 elemek állnak.

- diagonális mátrix

  Definíció. Diagonális mátrixnak nevezzük az olyan négyzetes mátrixokat, amelynek a főátlóján kívül minden eleme 0.

- determináns

  Definíció. Determinánsnak nevezzük azt a négyezes mátrixokon értelmezett egyértelmű függvényt, amelyre az alábbi tulajdonságok teljesülnek:
  1. minden oszlopban lineáris
  2. két oszlop felcserélésekor előjelet vált
  3. az egységmátrixokon az 1 értéket veszi fel.

- aldetermináns (minor)

  Definíció. Egy mátrix aldeterminánsai a négyzetes részmátrixainak determinánsai.

- permutáció előjele

  Definíció. Egy permutáció előjele 1, ha felírható páros sok transzpozíció kompozíciójaként, egyébként -1.

- inverz mátrix

  Definíció. Az A mátrix inverze A^{-1}, ha $A^{-1}A$ és AA^{-1} is az egységmátrixszal egyenlő.

- oszloprang (rang)

  Definíció. Egy mátrix oszloprangja az oszlopvektorai által generált altér dimenziója.

- elemi sorművelet

  Definíció. A mátrixokon értelmezett elemi sorműveletek a következők:
  1. egy sor megszorzása 0-tól különböző számmal
  2. két sor felcserélése
  3. egy sorhoz egy másik többszörösének hozzáadása.

- lineáris egyenletrendszer

  Definíció. Lineáris egyenletrendszernek nevezzük az

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

  alakú egyenletrendszereket, ahol $a_{1,1}, \ldots, a_{m,n}, b_1, \ldots, b_m$ adott számok.

- homogén/inhomogén lineáris egyenletrendszer

  Definíció. Az

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

  lineáris egyenletrendszer homogén, ha $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$, egyébként inhomogén.

- együtthatómátrix, kibővített mátrix

  Definíció. Az

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n &= b_m \end{aligned}$$

  lineáris egyenletrendszer együtthatómátrixa illetve kibővített mátrixa

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix} \text{ illetve } \begin{bmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{bmatrix}.$$

- lépcsős alak
- Gauss-elimináció
- lineáris leképezés
- lineáris transzformáció determinánsa
- lineáris transzformáció sajátértéke, sajátvektora

  Definíció. Legyen V vektortér a K test felett. Az $L : V \to V$ lineáris transzformációnak a $v \in V$ vektor sajátvektora $\lambda \in K$ sajátértékkel, ha $v \neq 0$ és $L(v) = \lambda v$.

- négyzetes mátrix sajátértéke, sajátvektora

Tételek

- lineárisan független vektorok lineáris kombinációjaként való előállításról szóló tétel
- bázisok elemszámáról szóló tétel
- determináns permutációkkal való felírásáról szóló tétel
- kifejtési tétel
- szorzat determinánsáról szóló tétel
- inverz létezésének jellemzéséről szóló tétel
- oszloprang jellemzéséről szóló tétel
- Kronecker–Capelli-tétel
- vektor lineáris leképezés általi képének koordinátáiról szóló tétel
- lineáris leképezések kompozíciójának mátrixáról szóló tétel
- szimmetrikus mátrix sajárvektorairól szóló tétel

2. Differenciálegyenletek (eleje)

Definíciók

- kezdetiérték-feladat
- lokális integrálgörbe
- iránymező
- izoklína
- szétválasztható differenciálegyenlet

Tételek

- Picard–Lindelöf-tétel

  Tétel. *Tegyük fel, hogy $D \subseteq \mathbb{R}^2$, az $f : D \to \mathbb{R}$ függvény folytonos és második változójában Lipschitz-folytonos. Ekkor az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenletnek minden $(x_0, y_0) \in D$ belső pont esetén létezik és egyértelmű az $y(x_0) = y_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása.*

---

3. Differenciálegyenletek (maradék)

Definíciók

- lineáris differenciálegyenlet

  Definíció. Lineáris differenciálegyenletnek nevezzük az $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$ alakú egyenleteket, ahol $a_0, \ldots, a_n, b$ adott függvények.

- állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet karakterisztikus polinomja

Definíció. Az $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ differenciálegyenlet karakterisztikus polinomja az $a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ polinom.

- Laplace-transzformáció

  Definíció. Egy $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltja az $\mathcal{L}f : D \to \mathbb{C}$ függvény, amire $\mathcal{L}f(z) = \displaystyle\int_0^\infty f(x)e^{-zx}\,\mathrm{d}\,x$, $D \subset \mathbb{C}$ azon komplex számokból áll, amire ez az integrál létezik.

- konvolúció

  Definíció. Az $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ függvények konvolúciója az $(f*g)(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)\,\mathrm{d}\,s$ módon definiált függvény.

- impulzusválasz-függvény

  Definíció. Az $a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ differenciálegyenlet impulzusválasz-függvénye az az $y_0(x)$ függvény, amelynek Laplace-transzformáltja

$$\mathcal{L}y_0(z) = \frac{1}{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0}.$$

Tételek

- Homogén lineáris differenciálegyenlet megoldáshalmazáról szóló tétel

  Tétel. *n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenlet lokális megoldásai n dimenziós vektorteret alkotnak.*

- Inhomogén lineáris differenciálegyenlet megoldáshalmazáról szóló tétel

  Tétel. *Egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása előáll egy tetszőleges megoldás és a hozzá tartozó homogén egyenlet általános megoldásának összegeként.*

- Laplace-transzformáció létezésére vonatkozó elégséges feltétel

  Tétel. *Ha $f(x) : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ lokálisan Riemann-integrálható és léteznek olyan $C, K \in \mathbb{R}$ konstansok, amire $|f(x)| \le Ke^{Cx} \in [0, \infty)$ minden x esetén teljesül, akkor $\operatorname{Re} z > C$ esetén létezik $\mathcal{L}f(z)$.*

- Laplace-transzformáció fő tulajdonságai

  Tétel.
  1. *$\mathcal{L}$ lineáris*
  2. *Ha $g(t) = \begin{cases} f(t-c) & \text{ha } t \ge c \\ 0 & \text{ha } t < c, \end{cases}$ akkor $\mathcal{L}g(z) = e^{-cz}\mathcal{L}f(z)$.*
  3. *Ha $g(t) = e^{\alpha t}f(t)$, akkor $\mathcal{L}g(z) = \mathcal{L}f(z-\alpha)$.*
  4. *Ha f folytonosan differenciálható a $[0, \infty)$ intervallumon, akkor $\mathcal{L}f'(z) = z\mathcal{L}f(z) - f(0)$.*
  5. *Ha $g(t) = tf(t)$, akkor $\mathcal{L}g(z) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,z}\mathcal{L}f(z)$.*

4. Többváltozós függvények

Definíciók

- pontsorozat konvergenciája

  Definíció. Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ sorozat konvergens és a határértéke $A \in \mathbb{R}^n$, ha $\forall\epsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \ge n_0 : |a_n - A| \le \epsilon$.

- többváltozós függvény határértéke

  Definíció. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény határértéke az $\vec{x}_0$ pontban $A \in \mathbb{R}$, ha $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n : 0 < |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta \implies |f(\vec{x}) - A| \leq \epsilon$.

- többváltozós függvény folytonossága

  Definíció. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény folytonos az $\vec{x}_0$ pontban, ha $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta \implies |f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0)| \leq \epsilon$.

- parciális derivált

  Definíció. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény i. változó szerinti parciális deriváltja az $\vec{x}_0$ pontban a $t \mapsto f(\vec{x}_0 + t\vec{e}_i)$ egyváltozós függvény 0 pontbeli deriváltja, ahol $\vec{e}_i$ az i. standard bázisvektor.

- többváltozós függvény differenciálhatósága

  Definíció. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvény differenciálható az $\vec{x}_0$ pontban és deriváltja ott a $D_{\vec{x}_0} f \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrix, ha

  $$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - D_{\vec{x}_0} f \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} = 0.$$

- gradiens

  Definíció. Egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gradiense a

  $$\operatorname{grad} f(x_1, \ldots, x_n) = (f'_{x_1}(x_1, \ldots, x_n), f'_{x_2}(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f'_{x_n}(x_1, \ldots, x_n))$$

  függvény.

- iránymenti derivált

  Definíció. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény $\vec{v}$ irányú iránymenti deriváltja az $\vec{x}_0$ pontban a $t \mapsto f(\vec{x}_0 + t\vec{e})$ egyváltozós függvény 0 pontbeli deriváltja, ahol $\vec{e} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ a $\vec{v}$ vektor irányába mutató egységvektor.

- Jacobi-mátrix

  Definíció. Jelölje az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ leképezés komponensfüggvényeit $f_1, \ldots, f_m$, azaz $f(x_1, \ldots, x_n) = (f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$. Ekkor f Jacobi-mátrixa a

  $$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial 2_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

  mátrix.

- többváltozós Taylor-polinom (csak másodrendű)

  Definíció. Egy $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kétszer differenciálható függvény $\vec{x}_0$ középpontú másodrendű Taylor-polinomja $T(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + (\operatorname{grad} f)(\vec{x}_0) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_0) + \frac{1}{2}(\vec{x} - \vec{x}_0)^T \cdot H \cdot (\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)$, ahol

  $$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{x_1 x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{x_1 x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{x_2 x_1} & \frac{\partial^2 f}{x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{x_2 x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{x_n x_1} & \frac{\partial^2 f}{x_n x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{x_n^2} \end{bmatrix}$$

  a Hesse-mátrix.

- lokális szélsőérték

  Definíció. Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek az $\vec{x}_0$ pontban lokális maximuma (minimuma) van, ha létezik olyan $\delta > 0$, amire $|\vec{x} - \vec{x}_0| < \delta$ esetén $f(\vec{x}) \leq f(\vec{x}_0)$ $(f(\vec{x}) \geq f(\vec{x}_0))$.

Tételek

- Bolzano–Weierstrass-tétel pontsorozatokra

  Tétel. *Minden* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ *korlátos pontsorozatból kiválasztható konvergens részsorozat.*

- Láncszabály többváltozós függvényekre

  Tétel. *Ha* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *differenciálható az* $\vec{x}_0$ *pontban és* $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ *differenciálható az* $f(\vec{x}_0)$ *pontban, akkor* $g \circ f$ *is differenciálható az* $\vec{x}_0$ *pontban és*

  $$D_{\vec{x}_0}(g \circ f) = (D_{f(\vec{x}_0)}g) \cdot (D_{\vec{x}_0}f).$$

- Young-tétel

  Tétel. *Ha az* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *függvény második parciális deriváltjai folytonosak, akkor* $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

- Szükséges feltétel differenciálható függvény lokális szélsőértékének létezésére

  Tétel. *Ha az* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *függvény differenciálható és az* $\vec{x}_0$ *pontban lokális szélsőértéke van, akkor* $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = 0$.

- Elégséges feltétel kétszer differenciálható függvény lokális szélsőértékének létezésére

  Tétel. *Ha az* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *függvény kétszer differenciálható,* $\operatorname{grad} f(\vec{x}_0) = 0$ *és a* $H(\vec{x}_0)$ *Hesse-mátrix pozitív definit (negatív definit), akkor a függvénynek az* $\vec{x}_0$ *pontban lokális minimuma (lokális maximuma) van.*

---

5. Többváltozós függvények integrálása

Definíciók

- külső és belső Jordan-mérték
- Jordan-mérhető halmaz
- Jordan-mérhető halmaz felosztása, a felosztás finomsága
- függvény adott felosztáshoz tartozó integrálközelítő összege
- többváltozós függvény Riemann-integrálja
- többváltozós függvény alsó és felső (Darboux-)integrálja

Tételek

- elégséges feltétel többváltozós függvény integrálhatóságára
- Fubini-tétel téglalapra
- Fubini-tétel normáltartományra
- integráltranszformációról szóló tétel (két dimenzióban)

6. Függvénysorok

Definíciók

- függvénsorozat konvergenciahalmaza
- egyenletes konvergencia
- függvénysor
- hatványsor
- hatványsor konvergenciasugara
- binomiális sor
- Fourier-sor

Tételek

- egyenletes konvergencia és folytonosság kapcsolatáról szóló tétel
- limesz és deriválás felcseréléséről szóló tétel
- Weierstrass-kritérium
- hatványsor konvergenciatartományáról szóló tétel
- Cauchy–Hadamard-tétel
- Fourier-sor konvergenciájának elégséges feltétele