

# Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 őszi

## 1. feladatsor: Vektorfüggvények deriválása (megoldás)

1. Tekintsük azt az  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lineáris leképezést, ami az  $(1, 0)$  vektort az  $(1, 0, -2)$  vektorba, a  $(0, 1)$  vektort pedig a  $(-2, 10, -1)$  vektorba viszi. Mi a mátrixa a standard bázisban? Tekintsük  $\mathbb{R}^2$ -ben az  $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$  és  $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$  vektorokat,  $\mathbb{R}^3$ -ben pedig az  $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$ ,  $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$  és  $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$  vektorokat. Ellenőrizzük, hogy ezek ortonormált bázisok és írjuk fel  $L$  mátrixát ezekre nézve is.

*Megoldás.* A standard bázisban a mátrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 10 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

A megadott vektorok  $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$  és  $\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$  miatt egységnyi hosszúak.  $3 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) = 0$  és  $(-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 0$  alapján páronként ortogonálisak, így lineárisan függetlenek. Számuk a dimenzióval egyezik meg, így tehát bázist is alkotnak. A leképezés mátrixa az új bázisban

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 10 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -4 \\ 2 & -4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

2. Tegyük fel, hogy egy  $M$  mátrix antiszimmetrikus része

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg  $OMO^{-1}$  antiszimmetrikus részét, ha

- $O$  az  $x - y$  síkra való tükrözés mátrixa;
- $O$  az  $x$  tengely körüli  $\alpha$  szögű forgatás mátrixa.

Hogyan változik az antiszimmetrikus részből képzett vektor a két esetben?

*Megoldás.*  $O$  mindkét esetben ortogonális, tehát  $OMO^{-1} = OMO^T$  antiszimmetrikus része  $OAO^T$ . Az első esetben az új antiszimmetrikus rész

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

a másodikban pedig

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 \cos \alpha + 2 \sin \alpha & -2 \cos \alpha + 3 \sin \alpha \\ -3 \cos \alpha - 2 \sin \alpha & 0 & -1 \\ 2 \cos \alpha - 3 \sin \alpha & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az első esetben a vektor a  $z$  tengelyre tükröződik, a másodikban pedig az  $x$  tengely körül  $\alpha$  szöggel elfordul.

3. Legyen  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$ . Határozzuk meg a  $\text{grad } f$  vektormezőt és a  $\Delta f$  skalármezőt.

*Megoldás.*

$$\text{grad } f(x, y, z) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (x, y, z).$$

$$\text{div grad } f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 3.$$

4. Legyen  $f_1(x, y) = e^x \cos y$  és  $f_2(x, y) = e^x \sin y$ . Számoljuk ki a  $\text{grad } f_1, \text{grad } f_2$  vektormezőket és a  $\Delta f_1, \Delta f_2$  skalármezőket.

*Megoldás.*

$$\text{grad } f_1(x, y) = (e^x \cos y, -e^x \sin y)$$

$$\text{grad } f_2(x, y) = (e^x \sin y, e^x \cos y)$$

$$\text{div grad } f_1(x, y) = e^x \cos y - e^x \cos y = 0$$

$$\text{div grad } f_2(x, y) = e^x \sin y - e^x \sin y = 0$$

5. Legyen  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható függvény, és legyen  $\mathbf{v}(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2})(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$ . Bizonyítsuk be, hogy  $\text{rot } \mathbf{v}$  minden pontban párhuzamos a  $\mathbf{k}$  vektorral és nagysága csak a  $z$  tengelytől mért távolságtól függ.

*Megoldás.* Számoljuk ki a rotációt:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{v}(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -yf(\sqrt{x^2 + y^2}) & xf(\sqrt{x^2 + y^2}) & 0 \end{vmatrix} \\ &= -\frac{\partial}{\partial z} \left( xf(\sqrt{x^2 + y^2}) \right) \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial z} \left( -yf(\sqrt{x^2 + y^2}) \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( xf(\sqrt{x^2 + y^2}) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -yf(\sqrt{x^2 + y^2}) \right) \right) \mathbf{k} \\ &= \left( 2f(\sqrt{x^2 + y^2}) + xf'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + yf'(\sqrt{x^2 + y^2}) \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \mathbf{k} \\ &= \left( 2f(\sqrt{x^2 + y^2}) + \sqrt{x^2 + y^2} f'(\sqrt{x^2 + y^2}) \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

6. Egy  $\mathbf{v}$  vektormező rotációja  $\text{rot } \mathbf{v}(x, y, z) = (y^3 - 2xyz)\mathbf{i} + (-2xz^2)\mathbf{j} + (2x^3 + yz^2)\mathbf{k}$ . Írjuk fel  $O \circ \mathbf{v} \circ O^{-1}$  rotációját, ha  $O$  az  $x = y$  síkra való tükrözés.

*Megoldás.*  $O$  tükrözés, tehát a tanultak szerint az új vektormező  $O\mathbf{r}$  pontbeli rotációja ugyanaz, mintha az eredeti  $\mathbf{r}$  pontbeli rotációra a  $-O$  forgatást alkalmaznánk. Tehát fel kell cserélni az első két komponenst, ellentettjére változtatni a vektort és  $x$ -et  $y$ -nal fel kell cserélni:  $\text{rot}(O \circ \mathbf{v} \circ O^{-1})(x, y, z) = 2yz^2\mathbf{i} + (-x^3 + 2xyz)\mathbf{j} + (-2y^3 - xz^2)\mathbf{k}$ .

7. Bizonyítsuk be az alábbi Leibniz-szabályokat:

a)  $\text{grad}(fg) = (\text{grad } f)g + f \text{grad } g$

b)  $\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2(\text{grad } f) \cdot (\text{grad } g) + f(\Delta g)$

*Megoldás.* A gradiens  $i$ . komponense:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (f(x_1, \dots, x_n)g(x_1, \dots, x_n)) \\ = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n) \right) g(x_1, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_n) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} g(x_1, \dots, x_n) \right), \end{aligned}$$

ez valóban  $(\text{grad } f)g + f \text{ grad } g$   $i$ . komponensével egyenlő.

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} (fg) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f \right) g + 2 \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_i} + f \left( \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} g \right)$$

## További gyakorló feladatok

8. Számoljuk ki a sík  $\alpha$  szögű forgatásának  $R(\alpha)$  mátrixát és ellenőrizzük ennek segítségével a szögfüggvényekre vonatkozó addíciós képleteket. Legyen  $A$  egy lineáris leképezés ( $2 \times 2$ -es) mátrixa a standard bázisban. Hogyan változik az antiszimmetrikus rész mátrixa, ha az  $\alpha$  szöggel pozitív irányban elforgatott bázisban írjuk fel? És ha a két bázisvektort felcseréljük?

*Megoldás.*  $(1, 0)$  képe  $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ ,  $(0, 1)$  képe  $(-\sin \alpha, \cos \alpha)$ , tehát

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

$R(\alpha + \beta) = R(\alpha)R(\beta)$  miatt

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & -\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ami az addíciós képletekkel ekvivalens.

Ha  $O$  ortogonális mátrix, akkor az  $O$  oszlopaiból képzett bázisban ugyanennek a leképezésnek a mátrixa  $O^{-1}AO = O^T AO$ . Ha  $A$  antiszimmetrikus része  $A_{as}$ , akkor  $O^T AO$  antiszimmetrikus része  $O^T A_{as} O$ . A  $2 \times 2$  antiszimmetrikus mátrixok egydimenziós vektorteret alkotnak,  $X \mapsto O^T X O$  lineáris leképezés, tehát elég egy nemnulla elem képét megnézni. Az elforgatott bázisnál  $O = R(\alpha)$ , tehát

$$R(\alpha)^T \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} R(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & -\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

vagyis az antiszimmetrikus rész nem változik. Ha a két bázisvektort felcseréljük, akkor hasonlóan

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

tehát az antiszimmetrikus rész az ellentettjére változik.

9. Legyen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  analitikus függvény, és definiáljuk az  $f_1, f_2$  síkbeli skalármezőket a következő módon:  $f_1(x, y) = \text{Re } f(x + iy)$  és  $f_2(x, y) = \text{Im } f(x + iy)$ . Bizonyítsuk be, hogy  $\text{grad } f_2$  minden pontban  $\text{grad } f_1$  elforgatottja  $\pi/2$  szöggel, és  $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0$ .

*Megoldás.* Először komplex együtthatós polinomokra látjuk be az állítást. Mivel a szereplő differenciáloperátorok és az elforgatás lineáris leképezések, elegendő a polinomok vektortérének egy  $\mathbb{R}$  feletti bázisára belátni az állítást. Válasszuk ennek az  $f(z) = az^n$  polinomokat, ahol  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \{1, i\}$ . Ha  $n = 0$ , akkor mindkét függvény konstans, tehát már a gradiensek is nullvektorok, ha viszont  $n \geq 1$ , akkor az első esetben

$$\begin{aligned} \text{grad } f_1(x, y) &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \text{Re } a(x + iy)^n, \frac{\partial}{\partial y} \text{Re } a(x + iy)^n, \right) \\ &= \text{Re} \left( an(x + iy)^{n-1}, ian(x + iy)^{n-1} \right) \\ &= \left( n \text{Re } a(x + iy)^{n-1}, -n \text{Im } a(x + iy)^{n-1} \right) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\operatorname{grad} f_2(x, y) &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{Im} a(x + iy)^n, \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{Im} a(x + iy)^n, \right) \\ &= \operatorname{Im} \left( an(x + iy)^{n-1}, ian(x + iy)^{n-1} \right) \\ &= \left( n \operatorname{Im} a(x + iy)^{n-1}, n \operatorname{Re} a(x + iy)^{n-1} \right),\end{aligned}$$

ezek valóban merőlegesek egymásra. Másrészt

$$\begin{aligned}\Delta f_1(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \operatorname{Re} a(x + iy)^n + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \operatorname{Re} a(x + iy)^n \\ &= \operatorname{Re} \left( an(n-1)(x + iy)^{n-2} + i^2 an(n-1)(x + iy)^{n-2} \right) = 0\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\Delta f_2(x, y) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} \operatorname{Im} a(x + iy)^n + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \operatorname{Im} a(x + iy)^n \\ &= \operatorname{Im} \left( an(n-1)(x + iy)^{n-2} + i^2 an(n-1)(x + iy)^{n-2} \right) = 0.\end{aligned}$$

Legyen  $z_0$  tetszőleges pont és írjuk fel  $f$  Taylor-sorát  $z_0$  körül. Ha ennek konvergenciasugarára  $R$ , akkor minden  $r < R$  sugarú  $z_0$  körüli körlapon a Taylor-sor tagonkénti  $k$ . deriváltja egyenletesen konvergál  $f$   $k$ . deriváltjához. A sor részletösszegei polinomok, és a konvergencia öröklődik  $f_1, f_2$  parciális deriváltjaira is, tehát a fenti tulajdonságok  $f$ -re is igazak.

10. Legyen  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  differenciálható függvény, és legyen  $\mathbf{v}(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ . Mutassuk meg, hogy  $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$ .

*Megoldás.* Vezessük be az  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  jelölést és számoljuk ki a rotációt:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{v}(x, y, z) &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xf(r) & yf(r) & zf(r) \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial y} zf(r) - \frac{\partial}{\partial z} yf(r) \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial}{\partial z} xf(r) - \frac{\partial}{\partial x} zf(r) \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \left( \frac{\partial}{\partial x} yf(r) - \frac{\partial}{\partial y} xf(r) \right) \mathbf{k} \\ &= f'(r) \left[ \left( z \frac{\partial r}{\partial y} - y \frac{\partial r}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( x \frac{\partial r}{\partial z} - z \frac{\partial r}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( y \frac{\partial r}{\partial x} - x \frac{\partial r}{\partial y} \right) \mathbf{k} \right] = 0,\end{aligned}$$

mivel  $\operatorname{grad} r(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$ .

11. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat ( $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ):

- $\operatorname{div}(f\mathbf{u}) = \operatorname{grad}(f) \cdot \mathbf{u} + f \operatorname{div}(\mathbf{u})$
- $\operatorname{rot}(f\mathbf{u}) = \operatorname{grad}(f) \times \mathbf{u} + f \operatorname{rot}(\mathbf{u})$
- $\operatorname{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \operatorname{rot}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{v})$

*Megoldás.* Legyen  $\mathbf{u}(x_1, \dots, x_n) = u_1(x_1, \dots, x_n)\mathbf{e}_1 + \dots + u_n(x_1, \dots, x_n)\mathbf{e}_n$ , stb.

$$\operatorname{div}(f\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f u_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i + f \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)$$

$$\operatorname{rot}(f\mathbf{u})(x, y, z)_x = \frac{\partial}{\partial y} f u_z - \frac{\partial}{\partial z} f u_y = \frac{\partial f}{\partial y} u_z - \frac{\partial f}{\partial z} u_y + f \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right),$$

ami éppen  $\text{grad}(f) \times \mathbf{u} + f \text{rot}(\mathbf{u})$  első komponense, stb.

$$\begin{aligned}\text{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= \frac{\partial(u_y v_z - u_z v_y)}{\partial x} + \frac{\partial(u_z v_x - u_x v_z)}{\partial y} + \frac{\partial(u_x v_y - u_y v_x)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial u_y}{\partial x} v_z - \frac{\partial u_z}{\partial x} v_y + \frac{\partial u_z}{\partial y} v_x - \frac{\partial u_x}{\partial y} v_z + \frac{\partial u_x}{\partial z} v_y - \frac{\partial u_y}{\partial z} v_x \\ &\quad + u_y \frac{\partial v_z}{\partial x} - u_z \frac{\partial v_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial v_x}{\partial y} - u_x \frac{\partial v_z}{\partial y} + u_x \frac{\partial v_y}{\partial z} - u_y \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ &= \text{rot}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \text{rot}(\mathbf{v}).\end{aligned}$$