

Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 őszi

1. feladatsor: Vektorfüggvények deriválása

1. Tekintsük azt az $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ lineáris leképezést, ami az $(1, 0)$ vektort az $(1, 0, -2)$ vektorba, a $(0, 1)$ vektort pedig a $(-2, 10, -1)$ vektorba viszi. Mi a mátrixa a standard bázisban? Tekintsük \mathbb{R}^2 -ben az $(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$ és $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ vektorokat, \mathbb{R}^3 -ben pedig az $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3})$, $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ és $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ vektorokat. Ellenőrizzük, hogy ezek ortonormált bázisok és írjuk fel L mátrixát ezekre nézve is.
2. Tegyük fel, hogy egy M mátrix antiszimmetrikus része

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Határozzuk meg OMO^{-1} antiszimmetrikus részét, ha

- a) O az $x - y$ síkra való tükrözés mátrixa;
- b) O az x tengely körüli α szögű forgatás mátrixa.

Hogyan változik az antiszimmetrikus részből képzett vektor a két esetben?

3. Legyen $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$. Határozzuk meg a $\text{grad } f$ vektormezőt és a Δf skalármezőt.
4. Legyen $f_1(x, y) = e^x \cos y$ és $f_2(x, y) = e^x \sin y$. Számoljuk ki a $\text{grad } f_1$, $\text{grad } f_2$ vektormezőket és a Δf_1 , Δf_2 skalármezőket.
5. Legyen $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, és legyen $\mathbf{v}(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2})(-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$. Bizonyítsuk be, hogy $\text{rot } \mathbf{v}$ minden pontban párhuzamos a \mathbf{k} vektorral és nagysága csak a z tengelytől mért távolságtól függ.
6. Egy \mathbf{v} vektormező rotációja $\text{rot } \mathbf{v}(x, y, z) = (y^3 - 2xyz)\mathbf{i} + (-2xz^2)\mathbf{j} + (2x^3 + yz^2)\mathbf{k}$. Írjuk fel $O \circ \mathbf{v} \circ O^{-1}$ rotációját, ha O az $x = y$ síkra való tükrözés.
7. Bizonyítsuk be az alábbi Leibniz-szabályokat:
 - a) $\text{grad}(fg) = (\text{grad } f)g + f \text{grad } g$
 - b) $\Delta(fg) = (\Delta f)g + 2(\text{grad } f) \cdot (\text{grad } g) + f(\Delta g)$

További gyakorló feladatok

8. Számoljuk ki a sík α szögű forgatásának $R(\alpha)$ mátrixát és ellenőrizzük ennek segítségével a szögfüggvényekre vonatkozó addíciós képleteket. Legyen A egy lineáris leképezés (2×2 -es) mátrixa a standard bázisban. Hogyan változik az antiszimmetrikus rész mátrixa, ha az α szöggel pozitív irányban elforgatott bázisban írjuk fel? És ha a két bázisvektort felcseréljük?
9. Legyen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analitikus függvény, és definiáljuk az f_1 , f_2 síkbeli skalármezőket a következő módon: $f_1(x, y) = \text{Re } f(x + iy)$ és $f_2(x, y) = \text{Im } f(x + iy)$. Bizonyítsuk be, hogy $\text{grad } f_2$ minden pontban $\text{grad } f_1$ elforgatottja $\pi/2$ szöggel, és $\Delta f_1 = \Delta f_2 = 0$.
10. Legyen $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ differenciálható függvény, és legyen $\mathbf{v}(x, y, z) = f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})$. Mutassuk meg, hogy $\text{rot } \mathbf{v} = 0$.
11. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságokat ($f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$):
 - (a) $\text{div}(f\mathbf{u}) = \text{grad}(f) \cdot \mathbf{u} + f \text{div}(\mathbf{u})$
 - (b) $\text{rot}(f\mathbf{u}) = \text{grad}(f) \times \mathbf{u} + f \text{rot}(\mathbf{u})$
 - (c) $\text{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \text{rot}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \text{rot}(\mathbf{v})$