

Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 őszi

10. feladatsor: Magasabbrendű lineáris differenciálegyenletek (megoldás)

1. Határozzuk meg az $e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$ függvények Wronski-determinánsát.

Megoldás. A megadott függvények $e^{\lambda x} f(x)$ alakúak, ezek deriváltjait a Leibniz-szabály alkalmazásával állíthatjuk elő:

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{\lambda x} f(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \lambda^i f^{(n-i)}(x) e^{\lambda x} = f^{(n)}(x) e^{\lambda x} + \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \lambda^i f^{(n-i)}(x) e^{\lambda x}.$$

Ebben az alakban láthatjuk, hogy az összegben megjelenő tagok mindegyike előáll $e^{\lambda x} f(x)$ legfeljebb $n - 1$ -edik deriváltjainak lineáris kombinációjaként, ahol az együtthatók f -től nem függenek. Így például

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} e^{\lambda x} f_1(x) & e^{\lambda x} f_2(x) \\ (e^{\lambda x} f_1(x))' & (e^{\lambda x} f_2(x))' \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} e^{\lambda x} f_1(x) & e^{\lambda x} f_2(x) \\ \lambda e^{\lambda x} f_1(x) + e^{\lambda x} f_1'(x) & \lambda e^{\lambda x} f_2(x) + e^{\lambda x} f_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} e^{\lambda x} f_1(x) & e^{\lambda x} f_2(x) \\ e^{\lambda x} f_1'(x) & e^{\lambda x} f_2'(x) \end{vmatrix} \\ &= e^{2\lambda x} \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Hasonlóan általában is elérhető sorműveletekkel, hogy csak $f_i^{(j)}(x)$ elemek maradjanak a determinánsban:

$$\begin{vmatrix} e^{\lambda x} f_1(x) & \cdots & e^{\lambda x} f_k(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} e^{\lambda x} f_1(x) & \cdots & \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} e^{\lambda x} f_k(x) \end{vmatrix} = e^{k\lambda x} \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_k(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_k'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(k-1)}(x) & f_2^{(k-1)}(x) & \cdots & f_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

A megadott függvények Wronski-determinánsa tehát

$$W(x) = e^{k\lambda x} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{k-1} \\ 0 & 1 & 2x & \cdots & (k-1)x^{k-2} \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & (k-1)(k-2)x^{k-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (k-1)! \end{vmatrix} = e^{k\lambda x} \prod_{n=0}^{k-1} n!.$$

Azt is észrevehetjük, hogy a megadott függvények az

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda \right)^k y(x) = 0,$$

azaz

$$\sum_{n=0}^k \binom{k}{n} (-\lambda)^{k-n} y^{(n)} = 0$$

lineáris differenciálegyenlet megoldásterének bázisát alkotját. Elsőrendű egyenletrendszerre alakítva $\mathbf{y} = (y, y', \dots, y^{(k-1)})$ bevezetésével az egyenlet

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -\binom{k}{1}(-\lambda)^{k-1} & -\binom{k}{2}(-\lambda)^{k-2} & -\binom{k}{3}(-\lambda)^{k-3} & \cdots & -\binom{k}{k-1}(-\lambda) \end{bmatrix} \mathbf{y} = A\mathbf{y}$$

lesz, tehát a Wronski-determinánsra a $W' = (\text{Tr } A)W = k\lambda W$ differenciálegyenlet teljesül, emiatt $W(x) = e^{k\lambda x}W(0)$.

2. A Wronski-determináns segítségével határozzuk meg a $4xy'' + 2y' + y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását, ha tudjuk, hogy $\cos \sqrt{x}$ megoldja az egyenletet.

Megoldás. Az $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$ differenciálegyenlet ekvivalens az

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{a_0(x)}{a_2(x)} & -\frac{a_1(x)}{a_2(x)} \end{bmatrix} \mathbf{y}$$

elsőrendű egyenletrendszerrel, ennek Wronski-determinánsa teljesíti a

$$W' = -\frac{a_1(x)}{a_2(x)}W$$

egyenletet. Most $a_1(x) = 2$, $a_2(x) = 4x$, tehát $W' = -\frac{1}{2x}W$, amiből $W(x) = \frac{C}{\sqrt{x}}$. Másrészt ha y_1 és y_2 az eredeti egyenlet két megoldása, akkor a

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

függvény ugyanezt a differenciálegyenletet teljesíti. Ha $y_1(x) = \cos \sqrt{x}$ ismert, akkor ez y_2 -re nézve elsőrendű lineáris inhomogén differenciálegyenletet jelent, amit az állandók variálásának módszerével oldhatunk meg. A konstrukció miatt y_1 megoldja a homogén egyenletet, tehát az inhomogén egyenlet megoldását $c(x)y_1(x)$ alakban keressük.

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & c(x)y_1(x) \\ y_1'(x) & (c(x)y_1(x))' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & c(x)y_1(x) \\ y_1'(x) & c(x)y_1'(x) + c'(x)y_1(x) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & c'(x)y_1(x) \end{vmatrix} = c'(x)y_1(x)^2$$

felhasználásával és pl. $C = 1$ választásával most

$$c'(x) = \frac{1}{\cos^2 \sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}},$$

tehát

$$c(x) = 2 \tan \sqrt{x}.$$

Így $y_2(x) = 2 \sin \sqrt{x}$, és az általános megoldás $A \cos \sqrt{x} + B \sin \sqrt{x}$.

3. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását.

a) $y^{(4)} - 2y''' - y'' + 2y' = 0$

b) $y'' - 4y' + 4y = 0$

c) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$

d) $y'' - 4y' + 29y = 0$

e) $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

Megoldás. Az egyenletekbe az $e^{\lambda x}$ függvényt helyettesítünk és elosztjuk mindkét oldalt ugyanezzel a függvénnyel. A bal oldal így λ egy polinomja lesz (karakterisztikus polinom), ha ennek λ_i gyöke m_i multiplicitással, akkor az $e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, \dots, x^{m_i-1}e^{\lambda_i x}$ függvények megoldják a differenciálegyenletet. Ez pontosan annyi függvényt határoz meg, mint amennyi az egyenlet rendje, és a függvények a megoldástér egy bázisát alkotják. (Ha $\lambda = a + bi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ gyök m multiplicitással, akkor $\bar{\lambda}$ is az ugyanilyen multiplicitással, ezek alkalmas lineáris kombinációi valóságok: $e^{ax} \cos bx, \dots, x^{m-1}e^{ax} \cos bx, e^{ax} \sin bx, \dots, x^{m-1}e^{ax} \sin bx$)

a) A karakterisztikus polinom $\lambda^4 - 2\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = (\lambda + 1)\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)$, az általános megoldás $y(x) = Ae^{-x} + B + Ce^x + De^{2x}$.

b) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$, az általános megoldás $y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x}$.

c) A karakterisztikus polinom $\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3$, az általános megoldás $y(x) = Ae^{-x} + Bxe^{-x} + Cx^2e^{-x}$.

d) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 4\lambda + 29$, ennek gyökei

$$\frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 29}}{2} = 2 \pm \sqrt{-25} = 2 \pm 5i,$$

az általános megoldás $y(x) = Ae^{2x} \cos 5x + Be^{2x} \sin 5x$.

e) A karakterisztikus polinom $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 + 1)^2 = (\lambda + i)^2(\lambda - i)^2$, az általános megoldás $y(x) = A \cos x + Bx \cos x + C \sin x + Dx \sin x$.

4. Legyenek $\omega \geq 0$ és $\alpha \geq 0$ valós paraméterek. Oldjuk meg az $y'' + 2\alpha y' + \omega^2 y = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 1, y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett. Miben különbözik a megoldás $\alpha > \omega$ és $\alpha < \omega$ esetén?

Megoldás. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega^2\lambda$, ennek gyökei

$$\frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\omega^2}}{2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}.$$

Ha $\alpha > \omega$, akkor mindkét gyök valós (negatív), az általános megoldás

$$y(x) = Ae^{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2})x} + Be^{(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2})x}.$$

A kezdeti feltételből kell A és B értékét meghatározni:

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = A + B \\ 0 &= y'(0) = (-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2})A + (-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega^2})B, \end{aligned}$$

ebből

$$\begin{aligned} A &= \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}}{2\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}} \\ B &= \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}}{2\sqrt{\alpha^2 - \omega^2}}. \end{aligned}$$

A kapott megoldás monoton csökken, exponenciálisan 0-hoz tart ($y(x) \leq Ce^{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega^2})x}$). Ha $\alpha < \omega$, akkor viszont komplex gyököket kapunk, az általános megoldás

$$y(x) = Ae^{-\alpha x} \cos(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}x) + Be^{-\alpha x} \sin(\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}x).$$

A kezdeti feltételből kell A és B értékét meghatározni:

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = A \\ 0 &= y'(0) = -\alpha A + \sqrt{\omega^2 - \alpha^2} B, \end{aligned}$$

ebből

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= \frac{\alpha}{\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}}. \end{aligned}$$

Ilyenkor a megoldás a 0 körül oszcillál. Ha $\alpha > 0$, akkor exponenciálisan 0-hoz tart ($|y(x)| \leq Ce^{-\alpha x}$), ha viszont $\alpha = 0$, akkor periodikus.

Meg kell még vizsgálni az $\alpha = \omega$ esetet. Ekkor $-\alpha$ kétszeres valós gyök, az általános megoldás $y(x) = Ae^{-\alpha x} + Bxe^{-\alpha x}$. A kezdeti feltételből kell A és B értékét meghatározni:

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = A \\ 0 &= y'(0) = -\alpha A + B, \end{aligned}$$

ebből $A = 1$ és $B = \alpha$. Ekkor a megoldás szigorúan monoton csökken, szintén exponenciálisan 0-hoz tart, de kicsivel lassabban mint $e^{-\alpha x}$ ($|y(x)| \leq Cxe^{-\alpha x}$). Ezt a megoldást az előző két eset bármelyikéből megkaphattuk volna $\omega \rightarrow \alpha$ határátmenettel.

5. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását.

- $y'' - 4y' - 12y = xe^x$
- $y'' - 4y' - 12y = xe^{-2x}$
- $y''' - 4y'' + 4y' = x^2 + e^{2x}$
- $y'' - 2y' + 5y = e^x \sin 2x$

Megoldás. Ha az inhomogén tag $p(x)e^{\lambda x}$ alakú, ahol $p(x)$ egy d fokú polinom és λ a karakterisztikus polinomnak m -szeres gyöke ($m = 0$ ha nem gyök), akkor az egyenletnek létezik $q(x)x^m e^{\lambda x}$ alakú megoldása, ahol $q(x)$ szintén d fokú polinom. (Komplex gyök esetén \cos , \sin előállítható a komplex exponenciálisokból.)

- A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 4\lambda - 12 = (\lambda + 2)(\lambda - 6)$, a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-2x} + Be^{6x}$. Nincsen rezonancia, $(C_0 + C_1x)e^x$ alakú megoldást keresünk. Ezt behelyettesítve az

$$\begin{aligned} xe^x &= 2C_1e^x + (C_0 + C_1x)e^x - 4(C_1e^x + (C_0 + C_1x)e^x) - 12(C_0 + C_1x)e^x \\ &= (-15C_0 - 2C_1)e^x + (-15C_1)xe^x \end{aligned}$$

egyenlethez jutunk, ami akkor teljesül minden x -re, ha $C_1 = -\frac{1}{15}$, $C_2 = \frac{2}{225}$. Tehát az általános megoldás

$$y(x) = \frac{2}{225}e^x - \frac{1}{15}xe^x + Ae^{-2x} + Be^{6x}.$$

- A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 4\lambda - 12 = (\lambda + 2)(\lambda - 6)$, a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-2x} + Be^{6x}$. Külső rezonancia van, $(C_0 + C_1x)xe^{-2x} = (C_0x + C_1x^2)e^{-2x}$ alakú megoldást keresünk. Ezt behelyettesítve az

$$(-8C_0 + 2C_1)e^{-2x} - 16C_1xe^{-2x} = xe^{-2x}$$

egyenlet adódik, ebből $C_1 = -\frac{1}{16}$ és $C_2 = -\frac{1}{64}$, így az általános megoldás

$$y(x) = -\frac{1}{64}xe^{-2x} - \frac{1}{16}x^2e^{-2x} + Ae^{-2x} + Be^{6x}.$$

- c) A karakterisztikus polinom $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda - 2)^2$, a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = A + Be^{2x} + Cxe^{2x}$ (belső rezonancia). Mindkét inhomogén tag miatt külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet megoldását $C_0x + C_1x^2 + C_2x^3 + D_0x^2e^{2x}$ alakban keressük. Behelyettesítve:

$$(4C_0 - 8C_1 + 6C_2) + (8C_1 - 24C_2)x + 12C_2x^2 + 4D_0e^{2x} = x^2 + e^{2x},$$

amiből $D_0 = \frac{1}{4}$, $C_2 = \frac{1}{12}$, $C_1 = \frac{1}{4}$, $C_0 = \frac{3}{8}$. Az általános megoldás

$$y(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{4}x^2e^{2x} + A + Be^{2x} + Cxe^{2x}.$$

- d) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = (\lambda - 1 + 2i)(\lambda - 1 - 2i)$, a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^x \cos 2x + Be^x \sin 2x$. Külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet megoldását $C_0xe^x \cos 2x + D_0xe^x \sin 2x$ alakban kereshetjük. Behelyettesítve:

$$4D_0e^x \cos 2x - 4C_0e^x \sin 2x = e^x \sin 2x,$$

tehát $C_0 = -\frac{1}{4}$ és $D_0 = 0$. Az általános megoldás

$$y(x) = -\frac{1}{4}xe^x \cos 2x + Ae^x \cos 2x + Be^x \sin 2x.$$

További gyakorló feladatok

6. Bizonyítsuk be, hogy az

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -e^{2x}y_1 + y_2 \end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszernek létezik nem korlátos megoldása.

Megoldás. Az egyenletrendszer mátrix alakban $\mathbf{y}' = A(x)\mathbf{y}$, ahol

$$A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -e^{2x} & 1 \end{bmatrix}.$$

Két lineárisan független megoldásból mátrixot képezhetünk, ennek determinánsa a $W(x)$ Wronski-determináns. A $W'(x) = \text{Tr } A(x)W(x) = W(x)$ egyenlet megoldása $W(x) = Ce^x$, ahol $C \neq 0$ állandó. Ha minden megoldás korlátos lenne, akkor a belőlük képzett determináns is korlátos lenne, de e^x nem az. Tehát létezik nem korlátos megoldás.

7. Határozzuk meg az $y'' - y' - e^{2x}y = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását, ha tudjuk, hogy e^{e^x} megoldás.

Megoldás. A Wronski-determinánsra $W' = W$ teljesül, tehát $W = Ce^x$. $y_1(x) = e^{e^x}$ megoldás, egy másikat $y_2(x) = c(x)y_1(x)$ alakban keressük ($C = 1$ feltehető):

$$e^x = \begin{vmatrix} y_1(x) & c(x)y_1(x) \\ y_1'(x) & (c(x)y_1(x))' \end{vmatrix} = c'(x)y_1(x)^2,$$

tehát

$$c'(x) = \frac{e^x}{e^{2e^x}}.$$

Ezt integrálva

$$c(x) = -\frac{1}{2}e^{-2e^x} + C$$

adódik, az általános megoldás

$$y(x) = C_1e^{e^x} + C_2e^{-e^x}.$$

8. Határozzuk meg az alábbi differenciálegyenletek általános megoldását.

- a) $y'' + 2y' + 10y = 0$
- b) $y'' - 12y' + 27y = 0$
- c) $y'' - 10y' + 25y = 0$
- d) $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$
- e) $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$
- f) $y^{(n)} - y = 0$, ahol $n \geq 1$ egész

Megoldás.

- a) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = (\lambda + 1 - 3i)(\lambda + 1 + 3i)$, az általános megoldás $y(x) = Ae^{-x} \cos 3x + Be^{-x} \sin 3x$.
- b) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 12\lambda + 27 = (\lambda - 3)(\lambda - 9)$, az általános megoldás $y(x) = Ae^{3x} + Be^{9x}$.
- c) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2$, az általános megoldás $y(x) = Ae^{5x} + Bxe^{5x}$.
- d) A karakterisztikus polinom $\lambda^4 + 18\lambda^2 + 81 = (\lambda^2 + 9)^2 = (\lambda + 3i)^2(\lambda - 3i)^2$, az általános megoldás $y(x) = A \cos 3x + B \sin 3x + Cx \cos 3x + Dx \sin 3x$.
- e) A karakterisztikus polinom $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = (\lambda - 2)^3$, az általános megoldás $y(x) = Ae^{2x} + Bxe^{2x} + Cx^2e^{2x}$.
- f) A karakterisztikus polinom

$$\lambda^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (\lambda - e^{2\pi i \frac{k}{n}}).$$

Ha n páratlan, akkor az általános megoldás

$$y(x) = Ae^x + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(C_k e^{\cos(2\pi i \frac{k}{n})} \cos e^{\sin(2\pi i \frac{k}{n})} + D_k e^{\cos(2\pi i \frac{k}{n})} \sin e^{\sin(2\pi i \frac{k}{n})} \right),$$

ha n páros, akkor pedig

$$y(x) = Ae^x + Be^{-x} + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}-1} \left(C_k e^{\cos(2\pi i \frac{k}{n})} \cos e^{\sin(2\pi i \frac{k}{n})} + D_k e^{\cos(2\pi i \frac{k}{n})} \sin e^{\sin(2\pi i \frac{k}{n})} \right).$$

9. Legyenek $\omega_0 > 0$ és $\omega \geq 0$ valós paraméterek. Oldjuk meg az $y'' + \omega_0^2 y = \sin(\omega x)$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett. Mi történik, ha $\omega = \omega_0$?

Megoldás. Az egyenlet inhomogén lineáris, a hozzá tartozó homogén egyenlet $y'' + \omega_0^2 y = 0$. A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + \omega_0^2 = (\lambda - i\omega_0)(\lambda + i\omega_0)$, tehát a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = A \cos(\omega_0 x) + B \sin(\omega_0 x)$. Ha $\omega \neq \omega_0$, akkor nincsen külső rezonancia, az inhomogén egyenlet megoldását $C \cos(\omega x) + D \sin(\omega x)$ alakban kereshetjük. Ezt behelyettesítve az egyenlet

$$-\omega^2 C \cos(\omega x) - \omega^2 D \sin(\omega x) + \omega_0^2 C \cos(\omega x) + \omega_0^2 D \sin(\omega x) = \sin(\omega x),$$

amiből $C(\omega_0^2 - \omega^2) = 0$, $D(\omega_0^2 - \omega^2) = 1$. Az általános megoldás

$$y(x) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega x) + A \cos(\omega_0 x) + B \sin(\omega_0 x).$$

Az A , B paraméterek értékét úgy kell megválasztani, hogy a kezdeti feltétel teljesüljön.

$$y'(x) = \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos(\omega x) - A\omega_0 \sin(\omega_0 x) + B\omega_0 \cos(\omega_0 x)$$

felhasználásával a feltétel

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = A \\ 0 &= y'(0) = \frac{\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} + B\omega_0, \end{aligned}$$

tehát $A = 0$ és $B = -\frac{\omega}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)}$, a kezdetiérték-probléma megoldása

$$y(x) = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega x) - \frac{\omega}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin(\omega_0 x) = \frac{\omega_0 \sin(\omega x) - \omega \sin(\omega_0 x)}{\omega_0(\omega_0^2 - \omega^2)}.$$

Ha $\omega = \omega_0$, akkor külső rezonancia van, tehát az inhomogén egyenletnek $Cx \cos(\omega_0 x) + Dx \sin(\omega_0 x)$ alakban keressük a megoldását. Behelyettesítés után az egyenlet

$$2D\omega_0 \cos(\omega_0 x) - 2C\omega_0 \sin(\omega_0 x) = \sin(\omega_0 x),$$

tehát $C = -\frac{1}{2\omega_0}$ és $D = 0$. Az általános megoldás

$$y(x) = -\frac{1}{2\omega_0} x \cos(\omega_0 x) + A \cos(\omega_0 x) + B \sin(\omega_0 x).$$

A kezdeti feltételből

$$\begin{aligned} 0 &= y(0) = A \\ 0 &= y'(0) = -\frac{1}{2\omega_0} + B\omega_0, \end{aligned}$$

azaz $A = 0$ és $B = \frac{1}{2\omega_0^2}$. A kezdetiérték-probléma megoldása ekkor

$$y(x) = -\frac{1}{2\omega_0} x \cos(\omega_0 x) + \frac{1}{2\omega_0^2} \sin(\omega_0 x).$$

Tehát külső rezonancia esetén a megoldás nem lesz korlátos, az első tag miatt lineárisan nő a rezgés amplitúdója. Ezt a megoldást az $\omega \neq \omega_0$ melletti megoldásból $\omega \rightarrow \omega_0$ határátmenettel is megkaphattuk volna.

10. Legyenek $\omega_1, \omega_2 \geq 0$ valós paraméterek. Oldjuk meg az $y^{(4)} + (\omega_1^2 + \omega_2^2)y'' + \omega_1^2\omega_2^2 y = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett. Mi történik, ha $\omega_1 = \omega_2$?

Megoldás. Az egyenlet homogén lineáris állandó együtthatós, a karakterisztikus polinom $\lambda^4 + (\omega_1^2 + \omega_2^2)\lambda^2 + \omega_1^2\omega_2^2 = (\lambda^2 + \omega_1^2)(\lambda^2 + \omega_2^2)$. Ha $\omega_1 \neq \omega_2$, akkor nincs rezonancia, az általános megoldás

$$y(x) = A \cos \omega_1 x + B \sin \omega_1 x + C \cos \omega_2 x + D \sin \omega_2 x.$$

Ennek deriváltjai:

$$\begin{aligned} y'(x) &= B\omega_1 \cos \omega_1 x - A\omega_1 \sin \omega_1 x + D\omega_2 \cos \omega_2 x - C\omega_2 \sin \omega_2 x \\ y''(x) &= -A\omega_1^2 \cos \omega_1 x - B\omega_1^2 \sin \omega_1 x - C\omega_2^2 \cos \omega_2 x - D\omega_2^2 \sin \omega_2 x \\ y'''(x) &= -B\omega_1^3 \cos \omega_1 x + A\omega_1^3 \sin \omega_1 x - D\omega_2^3 \cos \omega_2 x + C\omega_2^3 \sin \omega_2 x. \end{aligned}$$

A kezdeti feltétel alapján az együtthatókra az

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = A + C \\ 0 &= y'(0) = \omega_1 B + \omega_2 D \\ 0 &= y''(0) = -\omega_1^2 A - \omega_2^2 C \\ 0 &= y'''(0) = -\omega_1^3 B - \omega_2^3 D \end{aligned}$$

egyenletrendszer teljesül, ennek megoldása

$$\begin{aligned} A &= \frac{\omega_2^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \\ B &= 0 \\ C &= -\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2 - \omega_1^2} \\ D &= 0, \end{aligned}$$

tehát a kezdetiérték-probléma megoldása

$$y(x) = \frac{\omega_2^2 \cos \omega_1 x - \omega_1^2 \cos \omega_2 x}{\omega_2^2 - \omega_1^2}.$$

Ha $\omega_1 = \omega_2 =: \omega$, akkor belső rezonancia van, tehát az általános megoldás

$$y(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x + Cx \cos \omega x + Dx \sin \omega x,$$

ebből hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$y(x) = \frac{1}{2}x\omega \sin \omega x + \cos \omega x.$$

Ez a megoldás egyébként azzal a függvénnyel is megegyezik, amit az $\omega_1 \neq \omega_2$ esetben kapottból $\omega_2 \rightarrow \omega_1$ határátmenettel kapunk.

11. Határozzuk meg az alábbi kezdetiérték-problémák megoldását.

- $y'' + 4y' + 8y = e^{-2x} \cos 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$
- $y''' - 3y'' - y' + 3y = xe^{2x}$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$
- $y''' - 3y'' - y' + 3y = xe^{-x}$, $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$
- $y'' + 8y' + 16y = x^2 e^{-4x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$

Megoldás.

- A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 4\lambda + 8 = (\lambda + 2 + 2i)(\lambda + 2 - 2i)$, a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-2x} \cos 2x + Be^{-2x} \sin 2x$. Külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet egy megoldását $y(x) = Cxe^{-2x} \cos 2x + Dxe^{-2x} \sin 2x$ alakban keressük, behelyettesítés után $C = 0$, $D = \frac{1}{4}$ adódik. Az általános megoldás és deriváltja

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{4}xe^{-2x} \sin 2x + Ae^{-2x} \cos 2x + Be^{-2x} \sin 2x \\ y'(x) &= \frac{1}{4}e^{-2x} \sin 2x - \frac{1}{2}xe^{-2x} \sin 2x + \frac{1}{2}xe^{-2x} \cos 2x \\ &\quad + (-2A + 2B)e^{-2x} \cos 2x + (-2A - 2B)e^{-2x} \sin 2x, \end{aligned}$$

a kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned} 1 &= y(0) = A \\ 0 &= y'(0) = -2A + 2B, \end{aligned}$$

tehát $A = B = 1$.

- A karakterisztikus polinom $\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 3)$, a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-x} + Be^x + Ce^{3x}$. Nincsen rezonancia, az inhomogén egyenlet megoldását $y(x) = (C_0 + C_1x)e^{2x}$ alakban keressük. Behelyettesítés után az

egyenlet $(-3C_0 - C_1 - 3C_1x)e^{2x} = xe^{2x}$, amiből $C_0 = \frac{1}{9}$ és $C_1 = -\frac{1}{3}$. Az általános megoldás és deriváltjai

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{1}{9}e^{2x} - \frac{1}{3}xe^{2x} + Ae^{-x} + Be^x + Ce^{3x} \\y'(x) &= -\frac{1}{9}e^{2x} - \frac{2}{3}xe^{2x} - Ae^{-x} + Be^x + 3Ce^{3x} \\y''(x) &= -\frac{8}{9}e^{2x} - \frac{4}{3}xe^{2x} + Ae^{-x} + Be^x + 9Ce^{3x},\end{aligned}$$

a kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned}0 &= y(0) = \frac{1}{9} + A + B + C \\0 &= y'(0) = -\frac{1}{9} - A + B + 3C \\0 &= y''(0) = -\frac{8}{9} + A + B + 9C,\end{aligned}$$

ennek megoldása $A = \frac{1}{72}$, $B = -\frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{8}$.

- c) A karakterisztikus polinom $\lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda - 3)$, a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-x} + Be^x + Ce^{3x}$. Külső rezonancia van, az inhomogén egyenlet megoldását $y(x) = (C_0 + C_1x)xe^{-x}$ alakban keressük. Behelyettesítés után az egyenlet $(8C_0 - 12C_1 + 16C_1x)e^{-x} = xe^{-x}$, amiből $C_0 = \frac{3}{32}$ és $C_1 = \frac{1}{16}$. Az általános megoldás és deriváltjai

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{3}{32}xe^{-x} + \frac{1}{16}x^2e^{-x} + Ae^{-x} + Be^x + Ce^{3x} \\y'(x) &= \frac{3}{32}e^{-x} + \frac{1}{32}xe^{-x} - \frac{1}{16}x^2e^{-x} - Ae^{-x} + Be^x + 3Ce^{3x} \\y''(x) &= -\frac{1}{16}e^{-x} - \frac{5}{32}xe^{-x} + \frac{1}{16}x^2e^{-x} + Ae^{-x} + Be^x + 9Ce^{3x},\end{aligned}$$

a kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned}0 &= y(0) = A + B + C \\0 &= y'(0) = \frac{3}{32} - A + B + 3C \\0 &= y''(0) = -\frac{1}{16} + A + B + 9C,\end{aligned}$$

ennek megoldása $A = \frac{7}{128}$, $B = -\frac{1}{16}$, $C = \frac{1}{128}$.

- d) A karakterisztikus polinom $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = (\lambda + 4)^2$, a homogén egyenlet általános megoldása $y(x) = Ae^{-4x} + Bxe^{-4x}$ (belső rezonancia). Külső rezonancia is van, az inhomogén egyenlet megoldását $y(x) = (C_0 + C_1x + C_2x^2)x^2e^{-4x}$ alakban keressük. Behelyettesítve a kapott egyenlet $(2C_0 + 6C_1x + 12C_2x^2)e^{-4x} = x^2e^{-4x}$, tehát $C_0 = C_1 = 0$, $C_2 = \frac{1}{12}$. Az általános megoldás és deriváltja

$$\begin{aligned}y(x) &= \frac{1}{12}x^4e^{-4x} + Ae^{-4x} + Bxe^{-4x} \\y'(x) &= \frac{1}{3}x^3e^{-4x} - \frac{1}{3}x^4e^{-3x} + (-4A + B)e^{-4x} - 4Bxe^{-4x},\end{aligned}$$

a kezdeti feltétel alapján

$$\begin{aligned}0 &= y(0) = A \\1 &= y'(0) = -4A + B,\end{aligned}$$

ennek megoldása $A = 0$, $B = 1$.

12. Legyenek $\omega_0, \omega, \alpha > 0$ valós paraméterek. Keressük meg az $y'' + 2\alpha y' + \omega_0^2 y = \sin(\omega x)$ differenciálegyenletet periodikus megoldását ($y(x) = C \cos(\omega x) + D \sin(\omega x)$ alakban). Milyen ω mellett maximális y illetve y' amplitúdója?

Megoldás. A homogén egyenlet karakterisztikus polinomjának gyökei $\lambda_{\pm} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$, ezeknek mindig negatív a valós része, tehát a homogén egyenletnek nincs nemtriviális periodikus megoldása. Nincsen külső rezonancia, mert az inhomogén tagban a $\pm i\omega x$ kitevők tisztán képzetesek. A periodikus megoldás ezek szerint csak $y(x) = C \cos(\omega x) + D \sin(\omega x)$ alakú lehet.

$$\begin{aligned} y'(x) &= D\omega \cos(\omega x) - C\omega \sin(\omega x) \\ y''(x) &= -C\omega^2 \cos(\omega x) - D\omega^2 \sin(\omega x) \end{aligned}$$

felhasználásával behelyettesítés után az egyenlet

$$(\omega_0^2 C + 2\alpha\omega D - \omega^2 C) \cos(\omega x) + (\omega_0^2 D - 2\alpha\omega C - \omega^2 D) \sin(\omega x) = \sin(\omega x)$$

lesz. Ebből

$$\begin{aligned} C &= -\frac{2\alpha\omega}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \\ D &= -\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}. \end{aligned}$$

Érdeemes a kapott megoldást $A \sin(\omega x - \varphi)$ alakba is átírni, ekkor A a rezgés amplitúdója, φ pedig az inhomogén taghoz képest mért fázis. Az addíciós képlet felhasználásával $A = \sqrt{C^2 + D^2}$ és $\varphi = \arccos \frac{C}{\sqrt{C^2 + D^2}}$, tehát

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} \\ \varphi &= \arccos \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}. \end{aligned}$$

Függvényvizsgálattal meggyőződhetünk róla, hogy adott ω_0, α mellett az amplitúdó akkor maximális, ha $\omega = \sqrt{\max\{0, \omega_0^2 - 2\alpha^2\}}$.
 $y' = A\omega \cos(\omega x - \varphi)$ amplitúdója $A\omega$, ez $\omega = \omega_0$ esetén maximális.