Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 ősz

3. feladatsor: Görbe ívhossza, görbementi integrál (megoldás)

---

1. Mi az $\mathbf{r}(t) = \frac{t^3}{3}\mathbf{i} + \frac{6\sqrt{2}}{5}t^{\frac{5}{2}}\mathbf{j} + \frac{9}{2}t^2\mathbf{k}$ görbe ívhossza a $t \in [1,2]$ intervallumon?

   Megoldás. A megadott függvény differenciálható, tehát az ívhossz a derivált hosszának integrálásával áll elő:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_1^2 |\dot{\mathbf{r}}(t)| \,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^2 \left| t^2\mathbf{i} + 3\sqrt{2}t^{\frac{3}{2}}\mathbf{j} + 9t\mathbf{k} \right| \mathrm{d}t \\
&= \int_1^2 \sqrt{t^4 + 18t^3 + 81t^2} \,\mathrm{d}t \\
&= \int_1^2 (t^2 + 9t) \,\mathrm{d}t = \frac{2^3 - 1^3}{3} + \frac{9(2^2 - 1)}{2} = \frac{95}{6}.
\end{aligned}
$$

2. Tekintsük a síkon az

$$\mathbf{r}(t) = f(t)\cos t\,\mathbf{i} + f(t)\sin t\,\mathbf{j}$$

   paraméteres egyenletű spirált (csigavonal), ahol f differenciálható függvény. Mekkora a görbe $0 \le t \le 2\pi$ szakaszának (azaz egy körülfordulásnak) ívhossza, ha

   a) $f(t) = t$ (arkhimédeszi spirál)

   b) $f(t) = \alpha^t$ valamilyen rögzített $\alpha > 0$ értékkel (logaritmikus spirál)

   Megoldás. Tetszőleges differenciálható f mellett az ívhossz így számolható:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} |\dot{\mathbf{r}}(t)| \,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left|(f'(t)\cos t - f(t)\sin t)\,\mathbf{i} + (f'(t)\sin t + f(t)\cos t)\,\mathbf{j}\right| \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \sqrt{f'(t)^2 + f(t)^2} \,\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

   a) Ha $f(t) = t$, akkor $f'(t) = 1$, tehát

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + t^2} \,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{t\sqrt{1 + t^2} + \operatorname{arsh} t}{2} \right]_0^{2\pi} \\
&= \pi\sqrt{1 + 4\pi^2} + \frac{1}{2}\operatorname{arsh} 2\pi
\end{aligned}
$$

   b) Ha $f(t) = \alpha^t$, akkor $f'(t) = (\log\alpha)\alpha^t$, tehát

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \log^2\alpha}\,\alpha^t \,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{\sqrt{1 + \log^2\alpha}}{\log\alpha}\alpha^t \right]_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{1 + \log^2\alpha}}{\log\alpha}(\alpha^{2\pi} - 1)
\end{aligned}
$$

3. Integráljuk az $f(x,y,z)=\sqrt{1+4x+9yz}$ skalármezőt az $\mathbf{r}(t)=t^2\mathbf{i}+t\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$ görbe mentén $t=0$ és $t=1$ paraméterértékek között.

Megoldás. A skalármező folytonos, a paraméterezés differenciálható, tehát az alábbi (egyváltozós) integrállal számíthatjuk a görbementi integrált:

$$\begin{aligned}\int f\,\mathrm{d}s &= \int_0^1 f(\mathbf{r}(t))|\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 \sqrt{1+4t^2+9t^4}\left|2t\mathbf{i}+\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k}\right|\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 (1+4t^2+9t^4)\,\mathrm{d}t = 1+\frac{4}{3}+\frac{9}{5}=\frac{62}{15}.\end{aligned}$$

4. Egy vékony L hosszúságú drót vonalmenti sűrűsége egyik végétől a másikig lineárisan változik μ és 2μ között. A drótból körvonalat hajlítunk. Hol lesz a kapott test tömegközéppontja?

Megoldás. Válasszunk úgy koordinátarendszert, hogy a kör középpontja az origó, és a drót két (egybeeső) vége az x tengely pozitív felén van. Ekkor egy paraméterezés $\mathbf{r}(t)=r\cos t\mathbf{i}+r\sin t$, $t\in[0,2\pi]$, ahol $r=\frac{L}{2\pi}$, a sűrűség $\mu(1+\frac{t}{2\pi})$. A tömegközéppont koordinátáit az elsőrendű nyomatékok és a tömeg hányadosa adják. $|\dot{\mathbf{r}}(t)|=r|-\sin t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j}|=r$ alapján

$$x_{\mathrm{tk}}=\frac{\displaystyle\int_0^{2\pi} r\cos t\mu\left(1+\frac{t}{2\pi}\right)r\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{2\pi}\mu\left(1+\frac{t}{2\pi}\right)r\,\mathrm{d}t}=\frac{0}{3\pi r\mu}=0$$

és

$$y_{\mathrm{tk}}=\frac{\displaystyle\int_0^{2\pi} r\sin t\mu\left(1+\frac{t}{2\pi}\right)r\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{2\pi}\mu\left(1+\frac{t}{2\pi}\right)r\,\mathrm{d}t}=\frac{-r^2\mu}{3\pi r\mu}=-\frac{r}{3\pi}.$$

5. Mennyi az $\mathbf{u}(x,y,z)=(y^2-x^2)\mathbf{i}+2yz\mathbf{j}-x^2\mathbf{k}$ vektormező integrálja az $\mathbf{r}(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$ görbe mentén $t=0$-tól $t=1$-ig?

Megoldás. Folytonos vektormezőt kell integrálni differenciálható paraméterezéssel megadott görbén, ezt egyváltozós integrállal lehet számolni:

$$\begin{aligned}\int \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{u}(\mathbf{r})\cdot\dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 ((t^4-t^2)\mathbf{i}+2t^5\mathbf{j}-t^2\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k})\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^1 (-t^2-2t^5+4t^6)\,\mathrm{d}t=-\frac{1}{3}-2\cdot\frac{1}{5}+4\cdot\frac{1}{7}=-\frac{17}{105}.\end{aligned}$$

6. Integráljuk az $\mathbf{u}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u}(x,y,z)=y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$$

vektormezőt az $\mathbf{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$

$$\mathbf{r}(t)=\left(2^{t+1}-1\right)\mathbf{i}+\frac{t}{4+2t^2}\mathbf{j}+\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)e^{(1-t)^2}\mathbf{k}$$

térgörbe mentén a $t=0$ és $t=1$ paraméterértékeknek megfelelő pontok között.

Megoldás.

$$\operatorname{rot}\mathbf{u}(x,y,z)=\left(\frac{\partial 2z}{\partial y}-\frac{\partial x}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial y}{\partial z}-\frac{\partial 2z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial x}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial y}\right)\mathbf{k}=0,$$

tehát létezik potenciálfüggvény. Valóban, $f(x,y,z)=xy+z^2$ választással $\mathbf{u}=\operatorname{grad} f$. Használhatjuk a Newton-Leibniz-tételt, ekkor az integrál meghatározásához elég a két végpontot ismerni: $\mathbf{r}(0)=\mathbf{i}$ és $\mathbf{r}(1)=3\mathbf{i}+\frac{1}{6}\mathbf{j}+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}$, tehát

$$\int \mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}=f(\mathbf{r}(1))-f(\mathbf{r}(0))=1.$$

7. Mi az $\mathbf{u}(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ vektormező integrálja
   a) az origó körüli R sugarú kör mentén pozitív irányítással
   b) az origó körüli R sugarú kör mentén negatív irányítással
   c) az $(5,9)$ pont körüli 2 sugarú kör mentén pozitív irányítással
   d) az $\mathbf{r}(t)=\alpha\mathbf{i}+t\mathbf{j}$ egyenes mentén $(\alpha>0)$ $t=-\infty$-től $t=+\infty$-ig?

   Megoldás.

   a) Egy differenciálható paraméterezés $\mathbf{r}(t)=R\cos t\mathbf{i}+R\sin t\mathbf{j}$, ahol $t\in[0,2\pi]$, a paraméter növekedése pozitív irányú körülfordulást eredményez. Az integrál

$$\begin{aligned}\int \mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}&=\int_0^{2\pi}\left(\frac{-R\sin t}{R^2}\mathbf{i}+\frac{R\cos t}{R^2}\mathbf{j}\right)\cdot(-R\sin t\mathbf{i}+R\cos t\mathbf{j})\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^{2\pi}1\,\mathrm{d}t=2\pi.\end{aligned}$$

   b) Az előbbi görbe megfordításán integráljuk ugyanazt a vektormezőt, tehát az integrál -2π.

   c)

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x}{x^2+y^2}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{-y}{x^2+y^2}=\frac{(x^2+y^2)-(x\cdot 2x)}{(x^2+y^2)^2}+\frac{(x^2+y^2)-(y\cdot 2y)}{(x^2+y^2)^2}=0$$

   ha $(x,y)\neq(0,0)$. A megadott körvonal körül találunk olyan négyzetet, ami nem tartalmazza az origót, ezen létezik potenciál. A körvonal zárt görbe, tehát a Newton-Leibniz-tétel szerint az integrál 0.

   d) A görbe végtelen hosszú, de differenciálható függvénnyel adott (tehát lokálisan rektifikálható), így a vonalmenti integrál improprius integrálként értelmes lehet:

$$\begin{aligned}\int \mathbf{u}\cdot \mathrm{d}\mathbf{r}&=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{-t}{\alpha^2+t^2}\mathbf{i}+\frac{\alpha}{\alpha^2+t^2}\mathbf{j}\right)\cdot\mathbf{j}\,\mathrm{d}t\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha}\frac{1}{1+\left(\frac{t}{\alpha}\right)^2}\,\mathrm{d}t=\left[\arctan\frac{t}{\alpha}\right]_{t=-\infty}^{t=\infty}=\pi.\end{aligned}$$

További gyakorló feladatok

8. Mi az $\mathbf{r}(t)=e^t\cos t\mathbf{i}+e^t\sin t\mathbf{j}+e^t\mathbf{k}$ görbe ívhossza a $t\in[0,2]$ intervallumon?

   Megoldás.

$$\begin{aligned}I&=\int_0^2|\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^2\left|\left(e^t\cos t-e^t\sin t\right)\mathbf{i}+\left(e^t\sin t+e^t\cos t\right)\mathbf{j}+e^t\mathbf{k}\right|\mathrm{d}t\\&=\int_0^2\sqrt{3}e^t=\sqrt{3}(e^2-1).\end{aligned}$$

9. Mi az $\mathbf{r}(t) = (\sinh t + \cosh t)\mathbf{i} + (\cosh t - \sinh t)\mathbf{j} + \sqrt{2}t\mathbf{k}$ görbe ívhossza a $t \in [0, \ln 2]$ intervallumon?

   Megoldás.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 \left|(\cosh t + \sinh t)\,\mathbf{i} + (\sinh t - \cosh t)\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k}\right|\mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 2\cosh t = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

10. Mennyi az

$$\mathbf{r}(t) = 2\sin(t)\mathbf{i} + 2\cos(t)\mathbf{j} + \left(\frac{t^2}{2} - \ln t\right)\mathbf{k}$$

   térgörbe $1 \le t \le \sqrt{e}$ paraméterértékeknek megfelelő részének ívhossza?

   Megoldás.

$$\begin{aligned} I &= \int_1^{\sqrt{e}} |\dot{\mathbf{r}}(t)|\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{\sqrt{e}} \left|2\cos t\mathbf{i} - 2\sin t\mathbf{j} + \left(t - \frac{1}{t}\right)\mathbf{k}\right|\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{\sqrt{e}} \sqrt{2 + \frac{1}{t^2} + t^2} = \int_1^{\sqrt{e}} \left(t + \frac{1}{t}\right) = \left[\frac{t^2}{2} + \ln t\right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{e}{2}. \end{aligned}$$

11. Egy homogén tömegeloszlású vékony kötelet két végénél fogva lógatunk. Az általa meghatározott görbe egy paraméterezése $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \cosh t\mathbf{j}$, $t \in [-1, 1]$. Hol van a kötél tömegközéppontja?

   Megoldás. A görbe az y tengelyre szimmetrikus, tehát $x_{\mathrm{tk}} = 0$. A másik komponens az elsőrendű nyomaték és a tömeg hányadosa:

$$\begin{aligned} y_{\mathrm{tk}} &= \frac{\displaystyle\int_{-1}^{1} \cosh t|\mathbf{i} + \sinh t\mathbf{j}|\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{-1}^{1} |\mathbf{i} + \sinh t\mathbf{j}|\,\mathrm{d}t} \\ &= \frac{\displaystyle\int_{-1}^{1} \cosh^2 t\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_{-1}^{1} \cosh t\,\mathrm{d}t} \\ &= \frac{1 + \cosh 1 \sinh 1}{2\sinh 1} \approx 1{,}197. \end{aligned}$$

12. Homogén tömegeloszlású m tömegű vékony drótból a oldalú négyzet alakú keretet hajlítunk. Határozzuk meg az egyik átlóra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.

   Megoldás. Legyen a koordinátarendszer olyan, hogy a két átló az x illetve y tengelyre esik. Ekkor a négy oldal egy-egy paraméterezése (mindegyiknél $t \in [0, 1]$):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \frac{a}{\sqrt{2}}((1 - t)\mathbf{i} + t\mathbf{j}) \\ \mathbf{r}(t) &= \frac{a}{\sqrt{2}}(-t\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j}) \\ \mathbf{r}(t) &= \frac{a}{\sqrt{2}}((-1 + t)\mathbf{i} - t\mathbf{j}) \\ \mathbf{r}(t) &= \frac{a}{\sqrt{2}}(t\mathbf{i} + (-1 + t)\mathbf{j}) \end{aligned}$$

A négy szakaszon $|\dot{\mathbf{r}}(t)|$ egyaránt a (konstans).
A $\pi/2$ szögű forgásszimmetria miatt a két tengelyre vonatkozó tehetetlenségi nyomaték megegyezik. Pl. az x tengelyre nézve:

$$\begin{aligned}\Theta &= \int_0^1 \frac{m}{4a}\frac{a^2}{2}t^2 a\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{m}{4a}\frac{a^2}{2}(1-t)^2 a\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{m}{4a}\frac{a^2}{2}(-t)^2 a\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{m}{4a}\frac{a^2}{2}(-1+t)^2 a\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{ma^2}{8}\int_0^1 \left(4t^2-4t+2\right)\mathrm{d}t = \frac{ma^2}{8}\left(4\cdot\frac{1}{3}-4\cdot\frac{1}{2}+2\right) = \frac{ma^2}{6}.\end{aligned}$$

13. Mi az $\mathbf{u}(x,y,z) = (y+z)\mathbf{i}+(x+z)\mathbf{j}+(x+y)\mathbf{k}$ vektormező integrálja az AB szakasz mentén, ha $A = (1,-2,3)$, $B = (2,1,4)$?

Megoldás. Használjuk az $\mathbf{r}(t) = (\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k})+t(\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k})$ paraméterezést ($t \in [0,1]$), ezzel

$$\begin{aligned}\int \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{u}(\mathbf{r}(t))\cdot\dot{\mathbf{r}}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 ((-2+3t+3+t)\mathbf{i}+(1+t+3+t)\mathbf{j}+(1+t-2+3t)\mathbf{k})\cdot(\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k})\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 (12+14t) = 19.\end{aligned}$$

14. Legyen $\mathbf{u}:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ az alábbi vektormező:

$$\mathbf{u}(x,y,z) = xy\mathbf{i}+(y-z^2)\mathbf{j}+(2z-xy)\mathbf{k}$$

Határozza meg az $\mathbf{u}$ integrálját
a) az origó középpontú, x-y síkban felvő egységkörvonalon a z tengely pozitív fele felől nézve pozitív körüljárási irányban
b) ezen körvonal $y \geq 0$ félkörén az előbbivel megegyező irányban.

Megoldás. A paraméterezés legyen $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}$, ekkor
a)

$$\begin{aligned}\int \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} &= \int_0^{2\pi} (\cos t\sin t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}-\cos t\sin t\mathbf{k})\cdot(-\sin t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j})\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi}\left(\cos t\sin t-\cos t\sin^2 t\right)\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

b)

$$\int \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^{\pi}\left(\cos t\sin t-\cos t\sin^2 t\right)\mathrm{d}t = 0.$$

15. Integráljuk az $\mathbf{u}(x,y,z) = (2xy-z)\mathbf{i}+(x^2+z)\mathbf{j}+(y-x)\mathbf{k}$ vektormezőt az $\frac{1}{9}x^2+\frac{1}{16}y^2 = 1$, $z = 2$ egyenletrendszerrel megadott ellipszisen a z tengely pozitív fele irányából nézve pozitív körüljárás szerint.

Megoldás. A deriváltmátrix

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_x}{\partial z} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial z}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2y & 2x & -1 \\ 2x & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix},$$

ami szimmetrikus, tehát $\mathbf{u}$ potenciálos. A megadott görbe zárt, tehát a Newton-Leibniz-tétel alapján az integrál 0.