

Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 őszi

3. feladatsor: Görbe ívhossza, görbementi integrál

1. Mi az $\mathbf{r}(t) = \frac{t^3}{3}\mathbf{i} + \frac{6\sqrt{2}}{5}t^{\frac{5}{2}}\mathbf{j} + \frac{9}{2}t^2\mathbf{k}$ görbe ívhossza a $t \in [1, 2]$ intervallumon?
2. Tekintsük a síkon az

$$\mathbf{r}(t) = f(t) \cos t \mathbf{i} + f(t) \sin t \mathbf{j}$$

paraméteres egyenletű spirált (csigavonal), ahol f differenciálható függvény. Mekkora a görbe $0 \leq t \leq 2\pi$ szakaszának (azaz egy körülfordulásnak) ívhossza, ha

- a) $f(t) = t$ (arkhimédeszi spirál)
 - b) $f(t) = \alpha^t$ valamilyen rögzített $\alpha > 0$ értékkel (logaritmikus spirál)
3. Integráljuk az $f(x, y, z) = \sqrt{1 + 4x + 9yz}$ skalármezőt az $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ görbe mentén $t = 0$ és $t = 1$ paraméterértékek között.
 4. Egy vékony L hosszúságú drót vonalmenti sűrűsége egyik végétől a másikig lineárisan változik μ és 2μ között. A drótból körvonalat hajlítunk. Hol lesz a kapott test tömegközéppontja?
 5. Mennyi az $\mathbf{u}(x, y, z) = (y^2 - x^2)\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$ vektormező integrálja az $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ görbe mentén $t = 0$ -tól $t = 1$ -ig?
 6. Integráljuk az $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{u}(x, y, z) = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

vektormezőt az $\mathbf{r} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{r}(t) = (2^{t+1} - 1)\mathbf{i} + \frac{t}{4 + 2t^2}\mathbf{j} + \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)e^{(1-t)^2}\mathbf{k}$$

térgörbe mentén a $t = 0$ és $t = 1$ paraméterértékeknek megfelelő pontok között.

7. Mi az $\mathbf{u}(x, y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$ vektormező integrálja
 - a) az origó körüli R sugarú kör mentén pozitív irányítással
 - b) az origó körüli R sugarú kör mentén negatív irányítással
 - c) az $(5, 9)$ pont körüli 2 sugarú kör mentén pozitív irányítással
 - d) az $\mathbf{r}(t) = \alpha\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ egyenes mentén ($\alpha > 0$) $t = -\infty$ -tól $t = +\infty$ -ig?

További gyakorló feladatok

8. Mi az $\mathbf{r}(t) = e^t \cos t \mathbf{i} + e^t \sin t \mathbf{j} + e^t \mathbf{k}$ görbe ívhossza a $t \in [0, 2]$ intervallumon?
9. Mi az $\mathbf{r}(t) = (\sinh t + \cosh t)\mathbf{i} + (\cosh t - \sinh t)\mathbf{j} + \sqrt{2}t\mathbf{k}$ görbe ívhossza a $t \in [0, \ln 2]$ intervallumon?
10. Mennyi az

$$\mathbf{r}(t) = 2 \sin(t)\mathbf{i} + 2 \cos(t)\mathbf{j} + \left(\frac{t^2}{2} - \ln t\right)\mathbf{k}$$

térgörbe $1 \leq t \leq \sqrt{e}$ paraméterértékeknek megfelelő részének ívhossza?

11. Egy homogén tömegeloszlású vékony kötelet két végénél fogva lógatunk. Az általa meghatározott görbe egy paraméterezése $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \cosh t\mathbf{j}$, $t \in [-1, 1]$. Hol van a kötéltömegközéppontja?

12. Homogén tömegeloszlású m tömegű vékony drótból a oldalú négyzet alakú keretet hajlítunk. Határozzuk meg az egyik átlóra vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát.
13. Mi az $\mathbf{u}(x, y, z) = (y+z)\mathbf{i} + (x+z)\mathbf{j} + (x+y)\mathbf{k}$ vektormező integrálja az AB szakasz mentén, ha $A = (1, -2, 3)$, $B = (2, 1, 4)$?
14. Legyen $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ az alábbi vektormező:

$$\mathbf{u}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + (y - z^2)\mathbf{j} + (2z - xy)\mathbf{k}$$

Határozza meg az \mathbf{u} integrálját

- a) az origó középpontú, x - y síkban felvő egységkörvonalon a z tengely pozitív fele felől nézve pozitív körüljárási irányban
- b) ezen körvonal $y \geq 0$ félkörén az előbbivel megegyező irányban.
15. Integráljuk az $\mathbf{u}(x, y, z) = (2xy - z)\mathbf{i} + (x^2 + z)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}$ vektormezőt az $\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{16}y^2 = 1$, $z = 2$ egyenletrendszerrel megadott ellipszisen a z tengely pozitív fele irányából nézve pozitív körüljárás szerint.