

Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 őszi

5. feladatsor: Térfogati integrál (megoldás)

1. Határozzuk meg annak a tórusznak a térfogatát, aminek a középköre R sugarú, a keresztmetszete pedig r sugarú, $r < R$.

Megoldás. Egy paraméterezés: $\mathbf{r}(\varrho, \vartheta, \varphi) = (R + \varrho \cos \vartheta) \cos \varphi \mathbf{i} + (R + \varrho \cos \vartheta) \sin \varphi \mathbf{j} + \varrho \sin \vartheta \mathbf{k}$, ahol $(\varrho, \vartheta, \varphi) \in [0, r] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$, ebből

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varrho} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} &= (\cos \vartheta \cos \varphi \mathbf{i} + \cos \vartheta \sin \varphi \mathbf{j} + \sin \vartheta \mathbf{k}) \\ &\cdot (-\varrho \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{i} - \varrho \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{j} + \varrho \cos \vartheta \mathbf{k}) \\ &\cdot ((R + \varrho \cos \vartheta)(-\sin \varphi \mathbf{i} + \cos \varphi \mathbf{j})) = -\varrho(R + \varrho \cos \vartheta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varrho} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right| d\varphi d\vartheta d\varrho &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (R\varrho + \varrho^2 \cos \vartheta) d\varphi d\vartheta d\varrho \\ &= 4\pi^2 \int_0^r R\varrho d\varrho = 2\pi^2 Rr^2 \end{aligned}$$

2. Az $\left(\frac{x}{R}\right)^2 + \left(\frac{y}{R}\right)^2 + \left(\frac{2z}{h}\right)^{2n} \leq 1$ tartományt homogén anyagú, m tömegű test tölti ki ($R, h > 0$). Mekkora a koordinátatengelyekre vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka? Mi történik, ha $n \rightarrow \infty$?

Megoldás. Hengerkoordinátákkal: $\mathbf{r}(r, \phi, z) = r \cos \phi \mathbf{i} + r \sin \phi \mathbf{j} + z \mathbf{k}$. A tartománynak megfelelő határok: $-h/2 \leq z \leq h/2$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq R\sqrt{1 - (2z/h)^{2n}}$. Ha a sűrűség ρ , akkor a tömeg:

$$\begin{aligned} m &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R\sqrt{1-(2z/h)^{2n}}} \rho r dr d\phi dz \\ &= \rho 2\pi \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2} R^2 \left(1 - (2z/h)^{2n}\right) dz = \frac{2n\pi}{1+2n} h R^2 \rho \end{aligned}$$

amiből $\rho = \frac{(1+2n)m}{2n\pi h R^2}$. Elég az x és z irányú másodrendű nyomatékokat számolni:

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R\sqrt{1-(2z/h)^{2n}}} \rho (r \cos \phi)^2 r dr d\phi dz = \rho \frac{2hn^2\pi R^4}{1+6n+8n^2} = \frac{n}{1+4n} m R^2$$

és

$$\int_{-h/2}^{h/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{R\sqrt{1-(2z/h)^{2n}}} \rho z^2 r dr d\phi dz = \rho \frac{2h^3 n \pi R^2}{36+24n} = \frac{(1+2n)}{36+24n} m h^2$$

amiből a tehetetlenségi nyomatékok:

$$\begin{aligned} I_{xx} = I_{yy} &= m \left(\frac{1+2n}{36+24n} h^2 + \frac{n}{1+4n} R^2 \right) \rightarrow \frac{m h^2}{12} + \frac{m R^2}{4} \\ I_{zz} &= \frac{2n}{1+4n} m R^2 \rightarrow \frac{1}{2} m R^2 \end{aligned}$$

a limeszek az R sugarú, h magasságú henger tehetetlenségi nyomatékai.

3. Mennyi az m tömegű egyenletes tömegeloszlású vékony R sugarú kör alakú drót egy átmérőjére vonatkozó tehetetlenségi nyomatéka? Oldjuk meg a feladatot kétféleképp: a drótot kis keresztmetszetű tórusznak tekintve térfogati integrállal illetve vonalnak tekintve skalármező görbementi integrálásával.

Megoldás. [I] A drótot olyan tórusznak gondolhatjuk, aminek középköre R sugarú, keresztmetszete pedig $\varepsilon \ll R$ sugarú. A tórusz egy paraméterezése $\mathbf{r}(r, \vartheta, \varphi) = (R+r \cos \vartheta) \cos \varphi \mathbf{i} + (R+r \cos \vartheta) \sin \varphi \mathbf{j} + r \sin \vartheta \mathbf{k}$, ahol $(r, \vartheta, \varphi) \in [0, \varepsilon] \times [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. A paraméterezés Jacobi-determinánsa $r(R+r \cos \vartheta)$.

Ha a tórusz sűrűsége ρ , akkor tömege $m = \rho V = \rho \cdot 2\pi^2 R \varepsilon^2$, tehát $\rho = \frac{m}{2\pi^2 R \varepsilon^2}$. A tehetetlenségi nyomaték:

$$\begin{aligned} & \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \rho ((R+r \cos \vartheta)^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \vartheta) r (R+r \cos \vartheta) d\varphi d\vartheta dr \\ &= \rho \int_0^\varepsilon \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} (rR^3 \cos^2 \varphi + 3r^2 R^2 \cos \vartheta \cos^2 \varphi + 3r^3 R \cos^2 \vartheta \cos^2 \varphi + r^4 \cos^3 \vartheta \cos^2 \varphi \\ &+ r^3 R \sin^2 \varphi + r^4 \cos \vartheta \sin^2 \varphi) d\varphi d\vartheta dr \\ &= \rho \frac{1}{4} \pi^2 \varepsilon^2 (4R^3 + 5R\varepsilon^2) = \frac{1}{8} m (4R^2 + 5\varepsilon^2) \rightarrow \frac{mR^2}{2} \end{aligned}$$

Megoldás. [II] A drótot körvonalnak is gondolhatjuk, ekkor a sűrűsége végtelen, de lehet vonalmenti sűrűségről beszélni: $m = \mu \cdot 2\pi R$, tehát $\mu = \frac{m}{2\pi R}$. A körvonal legyen az x - y síkban, egy paraméterezés $\mathbf{r}(\varphi) = R \cos \varphi \mathbf{i} + R \sin \varphi \mathbf{j}$. A tehetetlenségi nyomaték:

$$\int_0^{2\pi} \mu R^2 \cos^2 \varphi R d\varphi = \mu R^3 \pi = \frac{mR^2}{2}$$

4. Számítsuk ki az m tömegű egyenletes tömegeloszlású vékony R sugarú gömbhéj egy átmérőjére vonatkozó tehetetlenségi nyomatékát. Oldjuk meg a feladatot kétféleképp: a gömbhéjat az $R+\varepsilon$ és R sugarú gömbök közti térrésznek gondolva térfogati integrállal illetve felületnek tekintve skalármező felszíni integrálásával.

Megoldás. [I] A gömbhéjra úgy gondolhatunk, hogy az origótól legalább R és legfeljebb $R+\varepsilon$ távolságra lévő pontok halmaza, ahol $\varepsilon \ll R$. Ha a sűrűsége ρ , akkor a tömege $m = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi[(R+\varepsilon)^3 - R^3]$. A másodrendű nyomaték minden irányban egyforma, tehát a tehetetlenségi nyomaték ennek kétszerese. Gömbi koordinátákkal számolva

$$\begin{aligned} I &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_R^{R+\varepsilon} \rho (r \cos \vartheta)^2 r^2 \sin \vartheta dr d\vartheta d\varphi = 4\pi \rho \int_0^\pi \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta \int_R^{R+\varepsilon} r^4 dr \\ &= \frac{2m}{5} \frac{(R+\varepsilon)^5 - R^5}{(R+\varepsilon)^3 - R^3} \rightarrow \frac{2}{3} m R^2 \end{aligned}$$

Megoldás. [II] A gömbhéjat felületnek idealizálva a sűrűség végtelenné válik, de beszélhetünk felületi sűrűségről: $m = \mu \cdot 4\pi R^2$, tehát $\mu = \frac{m}{4\pi R^2}$. $\mathbf{r}(\vartheta, \varphi) = R(\sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{i} + \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{j} + \cos \vartheta \mathbf{k})$ paraméterezéssel

$$I = 2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mu (R \cos \vartheta)^2 \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right| d\vartheta d\varphi = 4\pi R^2 \mu \int_0^\pi \cos^2 \vartheta \sin \vartheta d\vartheta = \frac{2}{3} m R^2$$

További gyakorló feladatok

5. Mekkora a térfogata az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ gömb és a $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ henger metszetének? (Viviani-féle test)

Megoldás. Hengerkoordináták: $\mathbf{r}(r, \phi, z) = r \cos \phi \mathbf{i} + r \sin \phi \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, a henger alapköre: $-\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2, 0 \leq r \leq 2 \cos \phi$

$$\begin{aligned} \iiint_V dV &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \phi} \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r dz dr d\phi = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \phi} \sqrt{4-r^2} r dr d\phi \\ &= 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{8}{3} \left(1 - \sqrt{1 - \cos^2 \phi} + \cos^2 \phi \sqrt{1 - \cos^2 \phi} \right) d\phi \\ &= \frac{32}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin \phi + \cos^2 \phi \sin \phi) d\phi = \frac{32}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

6. Mennyi az $f(x, y, z) = xyz$ függvény integrálja az $x^2 + y^2 \leq R^2, 0 \leq z \leq h$ hengeren?

Megoldás. Hengerkoordináták: $\mathbf{r}(\rho, \phi, z) = \rho \cos \phi \mathbf{i} + \rho \sin \phi \mathbf{j} + z \mathbf{k}$

$$\int_0^h \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos \phi \sin \phi z \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} \right| d\phi d\rho dz = \int_0^h z dz \int_0^R \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2\phi}{2} d\phi = 0$$

7. Integráljuk az $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ függvényt az $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ gömbön.

Megoldás. Gömbi koordináták: $\mathbf{r}(r, \vartheta, \varphi) = r \sin \vartheta \cos \varphi \mathbf{i} + r \sin \vartheta \sin \varphi \mathbf{j} + r \cos \vartheta \mathbf{k}$

$$\begin{aligned} \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r \sin \vartheta \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right| d\varphi d\vartheta dr &= \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r \sin \vartheta (r^2 \sin \vartheta) d\varphi d\vartheta dr \\ &= 2\pi \int_0^R r^3 dr \int_0^\pi \sin^2 \vartheta d\vartheta = \frac{\pi^2}{4} R^4 \end{aligned}$$

8. Integráljuk az $f(x, y, z) = xy$ függvényt az $x^2 + y^2 \leq z^2$ kúp $0 \leq z \leq 2, 0 \leq x, 0 \leq y$ egyenlőtlenségek által meghatározott darabján.

Megoldás. Hengerkoordináták: $\mathbf{r}(\rho, \phi, z) = \rho \cos \phi \mathbf{i} + \rho \sin \phi \mathbf{j} + z \mathbf{k}$, a paramétertartomány $0 \leq \rho \leq z \leq 2, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$. A függvény integrálja

$$\int_0^2 \int_0^z \int_0^{\pi/2} \rho^2 \cos \phi \sin \phi d\phi d\rho dz = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{z^3}{3} dz = \frac{2}{3}.$$

9. Tekintsük azt a homogén tömegeloszlású tömör tóruszt, amelynek középköre az $x-y$ síkban fekszik, középpontja az origó, a sugara pedig R , és amelynek a keresztmetszete r sugarú ($r < R$). Hol van a tömegközéppontja a $0 \leq x \leq y$ egyenlőtlenség által meghatározott darabjának?

Megoldás. Egy paraméterezés: $\mathbf{r}(\rho, \vartheta, \varphi) = (R + \rho \cos \vartheta) \cos \varphi \mathbf{i} + (R + \rho \cos \vartheta) \sin \varphi \mathbf{j} + \rho \sin \vartheta \mathbf{k}$, ahol $(\rho, \vartheta, \varphi) \in [0, r] \times [0, 2\pi] \times [\pi/4, \pi/2]$, a Jacobi-determináns $\rho(R + \rho \cos \vartheta)$. A térfogat

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho(R + \rho \cos \vartheta) d\rho d\vartheta d\varphi = \frac{\pi^2}{2} \int_0^r \rho R d\rho = \frac{\pi^2}{4} R r^2,$$

az elsőrendű nyomatékok pedig

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^r (R + \rho \cos \vartheta) \cos \varphi \rho (R + \rho \cos \vartheta) d\rho d\vartheta d\varphi \\ &= 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^r \left(R^2 + \frac{1}{2} \rho^2 \right) \rho d\rho = 2\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{R^2 r^2}{2} + \frac{r^4}{8} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_y &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^r (R + \rho \cos \vartheta) \sin \varphi \rho (R + \rho \cos \vartheta) d\rho d\vartheta d\varphi \\ &= 2\pi \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_0^r \left(R^2 + \frac{1}{2} \rho^2 \right) \rho d\rho = 2\pi \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{R^2 r^2}{2} + \frac{r^4}{8} \right) \end{aligned}$$

$$M_z = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^r \varrho \sin \vartheta \rho (R + \rho \cos \vartheta) d\varrho d\vartheta d\varphi = 0.$$

A tömegközéppont koordinátái:

$$\begin{aligned} x_{\text{tk}} &= \frac{(2 - \sqrt{2})(4R^2 + r^2)}{2\pi R} \\ y_{\text{tk}} &= \frac{4R^2 + r^2}{\sqrt{2}\pi R} \\ z_{\text{tk}} &= 0. \end{aligned}$$

10. Számítsuk ki az M tömegű, a élhosszúságú (tömör) szabályos oktaéder tehetetlenségi nyomatékát a középpontján áthaladó tengelyekre vonatkozóan.

Megoldás. Válasszunk olyan derékszögű koordinátarendszert, amelynek tengelyein helyezkednek el a csúcsok. Ekkor a három tengely cseréjére szimmetrikus az alakzat, tehát elegendő pl. az M_{xx} és M_{xy} másodrendű nyomatékokat kiszámolni. Az utóbbi ráadásul 0, hiszen az integrandus előjelet vált az $x = 0$ síkra való tükrözéskor, az oktaéder pedig önmagába megy át. Az $x, y, z \geq 0$ tényolcaddba az oktaédernek is egynyolcada esik, ez egy tetraéder, amelynek az origóból kiinduló élei páronként merőlegesek és $a/\sqrt{2}$ hosszúak. Egy ilyen tetraéder térfogata $\frac{a^3}{12\sqrt{2}}$, tehát a sűrűség $\varrho = \frac{3M}{\sqrt{2}a^3}$. A tehetetlenségi nyomaték bármely tengelyre az M_{xx} másodrendű nyomaték kétszerese, szimmetria miatt ezt elég egy tetraéderre számolni:

$$\begin{aligned} I_x &= I_y = I_z \\ &= 2 \cdot 8 \cdot \int_0^{a/\sqrt{2}} \int_0^{a/\sqrt{2}-x} \int_0^{a/\sqrt{2}-x-y} \varrho x^2 dz dy dx \\ &= 16\varrho \int_0^{a/\sqrt{2}} \int_0^{a/\sqrt{2}-x} \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - x - y \right) x^2 dy dx \\ &= 16\varrho \int_0^{a/\sqrt{2}} \left(\frac{a^2}{4} - \frac{ax}{\sqrt{2}} + \frac{x^2}{2} \right) x^2 dx \\ &= 16\varrho \frac{a^5}{240\sqrt{2}} = \frac{a^5 \varrho}{15\sqrt{2}} = \frac{Ma^2}{10}. \end{aligned}$$