

Matematika A3 gyakorlat

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 őszi

6. feladatsor: Integrálátalakító tételek (megoldás)

1. Mennyi az $\mathbf{u}(x, y, z) = x(x - 2xy + 2yz^2)\mathbf{i} - y(2x^2 + 4xyz + yz^2)\mathbf{j} + 2xz(x + 2y + 2yz)\mathbf{k}$ vektormező integrálja a $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ egységkocka felületén kifelé mutató irányítás mellett?

Megoldás. Alkalmazzuk a Gauss-Osztrogradszkij-tételt:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = (2x - 4xy + 2yz^2) - (2x^2 + 8xyz + 2yz^2) + (2x^2 + 4xy + 8xyz) = 2x$$

$$\iint_{\partial V} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{u} \, dV = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 2x \, dx \, dy \, dz = 1$$

2. Határozzuk meg az $\mathbf{u}(x, y, z) = -xz\mathbf{i} + (-xy + 2xz - yz)\mathbf{j} + (x^2 + xz + z^2)\mathbf{k}$ vektormező integrálját azon az irányított felületen, amely az $x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 10 - x$ egyenlőtlen-ségek által meghatározott tartomány kifelé irányított felületéből a $z = 0$ síkba eső alapkör elhagyásával keletkezik.

Megoldás. Ha hozzávennénk az elhagyott körlapot a felülethez, akkor zárt felületet kapunk, amin az integrált a Gauss-Osztrogradszkij-tétellel is számolhatjuk.

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(x, y, z) = \frac{\partial(-xz)}{\partial x} + \frac{\partial(-xy + 2xz - yz)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2 + xz + z^2)}{\partial z} = -z - x - z + x + 2z = 0.$$

Ha a megadott tartományt V jelöli, az elhagyott (kifelé irányított) körlapot pedig S , akkor

$$0 = \int_V \operatorname{div} \mathbf{u} \, dV = \int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} = \int_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} + \int_{\partial V \setminus S} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A},$$

tehát a keresett integrál az S -en vett integrál ellentettje. (Úgy is lehetne érvelni, hogy $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ miatt az integrál csak a határoló irányított görbétől függ, tehát ugyanaz, mint az integrál S -en megfordított irányítással.)

Paraméterezzük az S körlapot $\mathbf{r}(r, \phi) = r \cos \phi \mathbf{i} + r \sin \phi \mathbf{j}$ módon, $(r, \phi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$. A normálvektor

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = (\cos \phi \mathbf{i} + \sin \phi \mathbf{j}) \times (-r \sin \phi \mathbf{i} + r \cos \phi \mathbf{j}) = r \mathbf{k},$$

de ez felfelé mutat, tehát a megfelelő irányításhoz az ellentettjét kell venni. A vektormező a felületen

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(r, \phi)) = -r^2 \cos \phi \sin \phi \mathbf{j} + r^2 \cos^2 \phi \mathbf{k},$$

így a keresett integrál:

$$\begin{aligned} I &= - \int_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^1 (-r^2 \cos \phi \sin \phi \mathbf{j} + r^2 \cos^2 \phi \mathbf{k}) \cdot (-r \mathbf{k}) \, dr \, d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \, d\phi \int_0^1 r^3 \, dr = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

3. Integráljuk az $\mathbf{u}(x, y, z) = y^2\mathbf{i} + z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ vektormezőt az ABC háromszögvonalon (ebben az irányban), ahol $A = (a, 0, 0)$, $B = (0, a, 0)$ és $C = (0, 0, a)$, $a > 0$.

Megoldás. Alkalmazzuk a Stokes-tételt:

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = -2z\mathbf{i} - 2x\mathbf{j} - 2y\mathbf{k}$$

A háromszög paraméterezése: $\mathbf{r}(u, v) = a\mathbf{i} + ua(\mathbf{j} - \mathbf{i}) + va(\mathbf{k} - \mathbf{i})$

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} &= \int_S \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} \\ &= a^3 \int_0^1 \int_0^{1-u} (-2v\mathbf{i} - 2(1-u-v)\mathbf{j} - 2u\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{j} - \mathbf{i}) \times (\mathbf{k} - \mathbf{i}) \, dv \, du \\ &= a^3 \int_0^1 \int_0^{1-u} (-2) \, dv \, du = -a^3 \end{aligned}$$

4. Integráljuk a $\mathbf{v}(x, y, z) = -x^2y\mathbf{i} + xy^2\mathbf{j}$ vektormezőt az $x^2 + y^2 = a^2$ egyenletű körön pozitív forgásiránnyal.

Megoldás. Alkalmazzuk a Green-tételt, $\operatorname{rot} \mathbf{v}(x, y, z) = (x^2 + y^2)\mathbf{k}$, tehát

$$\oint_{\partial O} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_O \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int_0^a \int_0^{2\pi} r^2 r d\varphi dr = 2\pi \frac{a^4}{4} = \frac{\pi}{2} a^4$$

További gyakorló feladatok

5. Számítsuk ki az $\mathbf{u}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 3$ tetraéder felületén kifelé mutató irányítás mellett.

Megoldás. $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, ezért \mathbf{u} zárt felületen vett integrálja 0.

6. Mennyi az $\mathbf{u}(x, y, z) = (xy + 5z^2)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + (xz - y^2)\mathbf{k}$ vektormező integrálja annak a tetraédernek a felületén kifelé mutató irányítás mellett, amelynek csúcsai $(1, -2, 3), (0, -1, 1), (0, -3, 0), (4, 3, 3)$?

Megoldás. Zárt felületen kell integrálni, tehát használható a Gauss-Osztrogradszkij-tétel. Eszerint a kérdéses integrál megegyezik $\operatorname{div} \mathbf{u}$ integráljával a T "tömör" tetraéderen. Egy kényelmes paraméterezéshez tekintsük az $(1, -2, 3)$ csúcsból kiinduló $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ élvektorokat:

$$\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$$

$$\mathbf{b} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j}.$$

A paraméterezés legyen $\mathbf{r}(u, v, w) = (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c}$, ahol $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1 - u, 0 \leq w \leq 1 - u - v$. Ekkor a Jacobi-determináns $|\mathbf{abc}| = 20$.

A vektormező divergenciája:

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(x, y, z) = x + 3y$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}(u, v, w)) = -5 + 2u - 4v + 18w,$$

tehát

$$\begin{aligned} \int_{\partial T} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} &= \int_T \operatorname{div} \mathbf{u}(x, y, z) \cdot dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-u} \int_0^{1-u-v} 20(-5 + 2u - 4v + 18w) \, dw \, dv \, du \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-u} (80 - 220u + 140u^2 - 340v + 400uv + 260v^2) \, dv \, du \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{10}{3} - 20u + 50u^2 - \frac{80u^3}{3} \right) \, du \\ &= -\frac{10}{3}. \end{aligned}$$

(Lehetett volna közvetlenül is számolni az integrált, de az laponként egy kétváltozós integrál kiszámításával jár, így egyszerűbb.)

7. Mennyi az $\mathbf{u}(x, y, z) = (xy + yz)\mathbf{i} + (x^2 - yz)\mathbf{j} + (2xy + z^2)\mathbf{k}$ vektormező integrálja az

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} & \text{ha } t \in [0, 1] \\ \mathbf{i} + \mathbf{j} + (t-1)\mathbf{k} & \text{ha } t \in [1, 2] \\ (3-t)\mathbf{i} + (3-t)^2\mathbf{j} + \mathbf{k} & \text{ha } t \in [2, 3] \\ (4-t)\mathbf{k} & \text{ha } t \in [3, 4] \end{cases}$$

görbe $t \in [0, 4]$ darabján?

Megoldás. A megadott görbe zárt, tehát használhatjuk a Stokes-tételt. Ehhez egy S irányított felületdarabot kell választani, aminek a pereme éppen az adott görbe. Egy kényelmes választás: $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + u^2\mathbf{j} + v\mathbf{k}$ (egy parabolikus henger darabja), ahol $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$. A parciális deriváltak vektoriális szorzata

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = (\mathbf{i} + 2u\mathbf{j}) \times \mathbf{k} = 2u\mathbf{i} - \mathbf{j},$$

ez a vektor az irányítással ellentétes irányba mutat.

A felületen az \mathbf{u} vektormező rotációját kell integrálni:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{u}(x, y, z) &= (2x + y)\mathbf{i} + (-y)\mathbf{j} + (x - z)\mathbf{k} \\ \text{rot } \mathbf{u}(\mathbf{r}(u, v)) &= (2u + u^2)\mathbf{i} - u^2\mathbf{j} + (u - v)\mathbf{k}, \end{aligned}$$

tehát

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} &= \int_S \text{rot } \mathbf{u} \cdot d\mathbf{A} \\ &= - \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{u}(\mathbf{r}(u, v)) \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right) du dv \\ &= - \int_0^1 \int_0^1 (5u^2 + 2u^3) du dv = -\frac{13}{6}. \end{aligned}$$

8. Határozzuk meg az $\mathbf{u}(x, y, z) = (xy^2 - y^2z + x^2)\mathbf{i} + (x^2y - xyz)\mathbf{j} + (yz^2 - x^2z)\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $\mathbf{r}(t) = (t^3 + t)\mathbf{i} + \sqrt{4 + 3t^2 - t^4}\mathbf{j}$ görbe $t \in [-2, 2]$ intervallumnak megfelelő szakaszán.

Megoldás. Ha a görbéhez hozzáfűzzük a két végpontot összekötő szakaszt, akkor zárt görbét kapunk, tehát alkalmazható a Stokes-tétel.

$$\text{rot } \mathbf{u}(x, y, z) = (xy + z^2)\mathbf{i} + (-y^2 + 2xz)\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$$

A kapott zárt görbe (és így az általa határolt síkidom) a $z = 0$ síkban van, ott a rotáció z irányú komponense 0, tehát a felületi integrál 0. Eszerint a kérdéses integrál ugyanaz, mintha a két végpontot összekötő egyenesszakaszon integrálnánk. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i}$ ($t \in [-10, 10]$) ennek egy paraméterezése, tehát

$$\begin{aligned} \int \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{-10}^{10} \mathbf{u}(t, 0, 0) \cdot \mathbf{i} dt \\ &= \int_{-10}^{10} u_x(t, 0, 0) dt \\ &= \int_{-10}^{10} t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{-10}^{10} = \frac{2000}{3}. \end{aligned}$$

9. Bizonyítsuk be az alábbi parciális integrálási formulát, ahol f skalármező, \mathbf{u} vektormező, S peremes irányított felület:

$$\int_S (f \operatorname{rot} \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{A} = \int_{\partial S} f \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} - \int_S (\operatorname{grad} f \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{A}$$

Megoldás. A Stokes-tétel szerint

$$\int_{\partial S} f \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \int_S \operatorname{rot}(f \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{A}$$

teljesül. A jobb oldalon az integrandust Leibniz-szabály szerint lehet kifejteni: $\operatorname{rot}(f \mathbf{u}) = \operatorname{grad} f \times \mathbf{u} + f \operatorname{rot} \mathbf{u}$. Ebből átrendezéssel adódik az állítás. A felhasznált Leibniz-szabály a komponensek kiszámolásával ellenőrizhető, pl.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(f \mathbf{u})_z &= \frac{\partial(f u_y)}{\partial x} - \frac{\partial(f u_x)}{\partial y} \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} u_y + f \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} u_x - f \frac{\partial u_x}{\partial y} \\ &= (\operatorname{grad} f \times \mathbf{u})_z + f(\operatorname{rot} \mathbf{u})_z, \end{aligned}$$

stb.

10. Bizonyítsuk be, hogy egy T síkidom területét

$$A = \oint_{\partial T} x \mathbf{j} \cdot d\mathbf{r} = - \oint_{\partial T} y \mathbf{i} \cdot d\mathbf{r}$$

módon is számíthatjuk és ennek segítségével határozzuk meg az $\mathbf{r}(t) = \cos^3 t \mathbf{i} + \sin^3 t \mathbf{j}$ görbével határolt asztroid területét.

Megoldás. A $\mathbf{v}(x, y, z) = x \mathbf{j}$ és a $\mathbf{w}(x, y, z) = -y \mathbf{i}$ vektormezők rotációja $\operatorname{rot} \mathbf{v}(x, y, z) = \operatorname{rot} \mathbf{w}(x, y, z) = \mathbf{k}$, így a Green-tétel szerint valóban a területet kapjuk.

$\dot{\mathbf{r}}(t) = -3 \cos^2 t \sin t \mathbf{i} + 3 \sin^2 t \cos t \mathbf{j}$ miatt

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi} \cos^3 t (3 \sin^2 t \cos t) dt = 3 \int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t dt \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{16} + \frac{\cos 2t}{32} - \frac{\cos 4t}{16} - \frac{\cos 6t}{32} \right) dt = \frac{3\pi}{8} \end{aligned}$$