

Matematika A3 házi feladatok

Energetika és Mechatronika BSc szakok, 2016/17 őszi

2. Differenciálegyenletek

1. Határozza meg az $y' = x^2 - y$ differenciálegyenlet $y(1) = -1$ kezdeti feltételnek eleget tevő megoldásának szukcesszív approximációjával kapott első három közelítő függvényt.

2. Oldja meg az

$$y' = \frac{\sqrt{1+y^2}}{(x^2 - 4x + 8)^2}$$

differenciálegyenletet $y(2) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

3. Határozza meg az

$$y'' = \frac{y'}{\sqrt{1-x^2}}$$

differenciálegyenlet általános megoldását.

4. Oldja meg az $x^2 y' = xy - 2\sqrt{xy^3 - y^4}$ differenciálegyenletet $y(e) = e$ kezdeti feltétel mellett.

5. Határozza meg az $y' = -\arctan(y \sin x)$ differenciálegyenlet $y(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását és a kezdeti feltétel szerinti deriváltat ebben a pontban.

6. Legyen ϵ valós paraméter az $y'' + y + \epsilon y^3 = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ kezdetiérték-problémában. Határozza meg a megoldást $\epsilon = 0$ mellett, és számítsa ki a megoldás ϵ szerinti deriváltját ebben a pontban. (Útmutatás: a paraméteres egyenletrendszer ekvivalens az

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2 \\y_2' &= -y_1 - y_3 y_1^3 \\y_3' &= 0\end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszerrel, ha a kezdeti feltétel $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$, $y_3(0) = \epsilon$. Tehát a paraméter szerinti deriválás visszavezethető kezdeti feltétel szerinti deriválásra.)

7. Határozza meg az $3e^{-3x} + e^{-x} - 6e^{-2x}y + 3e^{-x}y^2 + (1 + 3e^{-2x} - 6e^{-x}y + 3y^2)y' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

8. Oldja meg a $y + (ye^x - 1)y' = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = -2$ kezdeti feltétel mellett.

9. Határozza meg a $xe^y + (x^2e^y + 2ye^{-y})y' = 0$ differenciálegyenlet általános megoldását.

10. Határozza meg a

$$y' - (\cos x)y = \sin x \cos x$$

differenciálegyenlet általános megoldását.

11. Határozza meg az

$$\mathbf{y}' = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{y} + \begin{bmatrix} \sinh x \\ 0 \end{bmatrix}$$

differenciálegyenlet-rendszer általános megoldását.

12. Oldja meg az $xy'' - y' + 4x^3y = 4x^6 + 3x^2$ differenciálegyenletet $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$ kezdeti feltétel mellett, ha a hozzá tartozó homogén egyenletnek $y_1(x) = \sin x^2$ és $y_2(x) = \cos x^2$ megoldásai.

13. Sorfejtéssel határozza meg az $(1 - 2x^2)y'' + (2x + 4x^3)y' + (-2 - 4x^2)y = 0$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

14. Bizonyítsa be, hogy az

$$\begin{aligned}y_1' &= (\cos^2 x)y_1 - e^{-x}y_2 \\y_2' &= (1 + x^2)^{-1}y_1 + (\sin^2 x)y_2\end{aligned}$$

differenciálegyenlet-rendszernek létezik nem korlátos megoldása. (Útmutatás: hogyan változik x függvényében a Wronski-determináns?)

15. Oldja meg az

$$y'' + 2y' - 3y = \frac{3e^{3x} + 5e^{2x}}{(1 + e^x)^3}$$

differenciálegyenletet $y(0) = y'(0) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

16. Határozza meg az $y''' + y'' - 6y' = x^2 \cos x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

17. Oldja meg az $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 4$ kezdeti feltétel mellett.

18. Határozza meg az $y'' + 6y' + 13y = xe^{-3x} \cos 2x$ differenciálegyenlet általános megoldását.

19. Határozza meg az $y''' + 4y'' + 4y' = x^2e^{-2x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.

20. Számítsa ki az

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{ha } 1 \leq x < T \\ T + 1 - x & \text{ha } T \leq x < T + 1 \\ 0 & \text{ha } T + 1 \leq x \end{cases}$$

függvény Laplace-transzformáltját, ahol $T \geq 1$ valós paraméter.