Matematika A3 első PZH **A csoport**

Energetika és Mechatronika BSc szakok 2016. december 6.

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre.

1. (3×2p) Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis.
   a) Ha egy $\mathbf{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ függvény rektifikálható görbét határoz meg, akkor Lipschitz-folytonos.
   b) Bármely skalármező gradiensének rotációja 0.
   c) Vektormező felületi integráljánál az irányítás megfordításakor az integrál ellentettjére változik.

   Megoldás.
   a) Hamis. A rektifikálhatóságból csak annyi következik, hogy létezik Lipschitz-folytonos paraméterezés.
   b) Igaz. Potenciális vektormező deriváltja szimmetrikus, tehát az antiszimmetrikus része 0, és így a rotációja is.
   c) Igaz. Az irányítás megfordításakor a felületi normálisok is ellentettjükre változnak, ezek skalárszorzata a vektomező értékével szintén az ellentettjére változik.

2. (4p) Bizonyítsa be a $\operatorname{div}(f\mathbf{u}) = (\operatorname{grad} f)\cdot\mathbf{u} + f\operatorname{div}\mathbf{u}$ Leibniz-szabályt, ahol f skalármező, $\mathbf{u}$ vektormező.

   Megoldás. Jelölje a szokásos módon $\mathbf{u}$ komponensfüggvényeit u_x, u_y, u_z, ekkor a szorzat divergenciája így írható:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(f\mathbf{u}) &= \frac{\partial(fu_x)}{\partial x} + \frac{\partial(fu_y)}{\partial y} + \frac{\partial(fu_z)}{\partial z} \\
&= f\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) + \frac{\partial f}{\partial x}u_x + \frac{\partial f}{\partial y}u_y + \frac{\partial f}{\partial z}u_z \\
&= f\operatorname{div}\mathbf{u} + \operatorname{grad} f\cdot\mathbf{u}.
\end{aligned}$$

3. (8p) Számítsa ki az $\mathbf{u}(x,y,z) = (-y^3z-6x^2z^3)\mathbf{i}+(-3xy^2z+9y^2z^2)\mathbf{j}+(-xy^3+6y^3z-6x^3z^2)\mathbf{k}$ vektormező integrálját az

$$\mathbf{r}(t) = \tan\left(\frac{\pi}{4}t\right)\mathbf{i} + \frac{2t}{t^2-1-t^4}\mathbf{j} + \left(3-\frac{6}{2+t^2}\right)\mathbf{k}$$

   görbe mentén a $t=0$ és $t=1$ paraméterértékek közötti darabon.

   Megoldás. Számoljuk ki $\mathbf{u}$ rotációját:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{u}(x,y,z) &= \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\
&= \Big((-3xy^2+18y^2z) - (-3xy^2+18y^2z)\Big)\mathbf{i} \\
&+ \Big((-y^3-18x^2z^2) - (-y^3-18x^2z^2)\Big)\mathbf{j} + \Big((-3y^2z) - (-3y^2z)\Big)\mathbf{k} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

   tehát $\mathbf{u}$ potenciálos, mivel értelmezési tartománya $\mathbb{R}^3$. Egy potenciálfüggvény:

$$\begin{aligned}
f(x,y,z) &= \int_0^x u_x(\xi,0,0)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y u_y(x,\eta,0)\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z u_z(x,y,\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\
&= \int_0^x 0\,\mathrm{d}\xi + \int_0^y 0\,\mathrm{d}\eta + \int_0^z \left(-xy^3+6y^3\zeta-6x^3\zeta^2\right)\mathrm{d}\zeta \\
&= -xy^3z + 3y^3z^2 - 2x^3z^3.
\end{aligned}$$

A görbementi integrálra vonatkozó Newton-Leibniz-tétel szerint a keresett integrál egyenlő f megváltozásával a kezdő- és végpont között.

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) &= 0 & f(\mathbf{r}(0)) &= 0 \\ \mathbf{r}(1) &= \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k} & f(\mathbf{r}(1)) &= -18 \end{aligned}$$

alapján az integrál értéke -18.

4. (8p) Hol van a tömegközéppontja annak a vékony, homogén tömegeloszlású drótnak, amelynek alakját a $\mathbf{r}(t) = \cosh t \cos t\mathbf{i} + \cosh t \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ görbe $-\pi \leq t \leq \pi$ darabja írja le.

Megoldás. A tömegközéppont koordinátáit úgy lehet kiszámolni, hogy a koordinátafüggvények görbementi integráljait elosztjuk az ívhosszal.

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{r}}| &= |(\sinh t \cos t - \cosh t \sin t)\mathbf{i} + (\sinh t \sin t + \cosh t \cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}| \\ &= \sqrt{(\sinh t \cos t - \cosh t \sin t)^2 + (\sinh t \sin t + \cosh t \cos t)^2 + 1} \\ &= \sqrt{\sinh^2 t \cos^2 t + \cosh^2 t \sin^2 t + \sinh^2 \sin^2 + \cosh^2 t \cos^2 t + 1} \\ &= \sqrt{2\cosh^2 t} = \sqrt{2}\cosh t \end{aligned}$$

alapján a szükséges integrálok

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cosh t \cos t \sqrt{2} \cosh t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos t + \cosh 2t \cos t) \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh 2t \cos t \,\mathrm{d}t$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cosh t \sin t \sqrt{2} \cosh t \,\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} t\sqrt{2} \cosh t \,\mathrm{d}t = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2} \cosh t \,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\,[\sinh t]_{-\pi}^{\pi} = 2\sqrt{2}\sinh \pi.$$

A második és harmadik integráloknál azt használtuk fel, hogy az integrandus páratlan, az integrálási tartomány pedig szimmetrikus az origóra.
Az első integrál megmaradó tagját parciális integrálással számolhatjuk:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cosh 2t \cos t \,\mathrm{d}t &= [\cosh 2t \sin t]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 2\sinh 2t \sin t \,\mathrm{d}t \\ &= -\left([2\sinh 2t(-\cos t)]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} 4\cosh 2t(-\cos t) \,\mathrm{d}t \right) \\ &= -4\sinh 2\pi - 4\int_{-\pi}^{\pi} \cosh 2t \cos t \,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

amiből átrendezéssel

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cosh t \cos t \sqrt{2} \cosh t \,\mathrm{d}t = -\frac{2\sqrt{2}}{5} \sinh 2\pi.$$

Tehát a drót tömegközéppontja

$$-\frac{1}{5}\frac{\sinh 2\pi}{\sinh \pi}\mathbf{i} = -\frac{2}{5}\cosh \pi \mathbf{i}.$$

5. (8p) Mekkora a felszíne az $\mathbf{r}(u, v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u^2 + v^2)^{3/4}\mathbf{k}$ felület $1 \leq u^2 + v^2 \leq 4$, $v \geq 0$ paramétertartománynak megfelelő darabjának?

Megoldás.

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| &= \left|\left(\mathbf{i}+\frac{3u}{2(u^2+v^2)^{1/4}}\mathbf{k}\right)\times\left(\mathbf{j}+\frac{3v}{2(u^2+v^2)^{1/4}}\mathbf{k}\right)\right| \\
&= \left|-\frac{3u}{2(u^2+v^2)^{1/4}}\mathbf{i}-\frac{3v}{2(u^2+v^2)^{1/4}}\mathbf{j}+\mathbf{k}\right| \\
&= \sqrt{1+\frac{9}{4}\sqrt{u^2+v^2}}.
\end{aligned}$$

Ezt a kétváltozós függvényt kell integrálni a megadott paramétertartományon. Érdemes $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$ polárkoordinátákra áttérni, a Jacobi-determináns r, a paramétertartomány $r \in [1,2]$, $\varphi \in [0,\pi]$. A felszín:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\substack{1\le u^2+v^2\le 4\\ v\ge 0}} \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right| \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\
&= \int_1^2\int_0^\pi r\sqrt{1+\frac{9}{4}r}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{4\pi}{9}\int_1^2\left(1+\frac{9}{4}r-1\right)\sqrt{1+\frac{9}{4}r}\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{4\pi}{9}\int_1^2\left(\left(1+\frac{9}{4}r\right)^{3/2}-\sqrt{1+\frac{9}{4}r}\right)\mathrm{d}r \\
&= \frac{4\pi}{9}\left[\frac{2}{5}\frac{4}{9}\left(1+\frac{9}{4}r\right)^{5/2}-\frac{2}{3}\frac{4}{9}\left(1+\frac{9}{4}r\right)^{3/2}\right]_1^2 \\
&= \frac{1012\sqrt{22}-247\sqrt{13}}{1215}\pi.
\end{aligned}$$

6. (8p) Integrálja az $\mathbf{u}(x,y,z) = x^3\mathbf{i}+yz^2\mathbf{j}-x^2z\mathbf{k}$ vektormezőt az $x^2+y^2 = R^2$ felület $|z| \le h/2$ darabján kifelé (a z tengelytől távolodó irányba) mutató irányítás mellett.

   Megoldás. A felület egy hengerpalást, egy lehetséges paraméterezése $\mathbf{r}(u,v) = R\cos u\mathbf{i} + R\sin u\mathbf{j} + v\mathbf{k}$, ahol $u \in [0,2\pi]$, $v \in [-h/2,h/2]$. A normálvektor

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} &= (-R\sin u\mathbf{i}+R\cos u\mathbf{j})\times\mathbf{k} \\
&= R\cos u\mathbf{i}+R\sin u\mathbf{j},
\end{aligned}$$

   A vektormező értéke a felületen pedig

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v)) = R^3\cos^3 u\mathbf{i}+Rv^2\sin u\mathbf{j}-R^2v\cos^2 u\mathbf{j}.$$

   A vektormező integrálja ezek alapján

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{u}\cdot\mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_0^{2\pi}\int_{-h/2}^{h/2}\mathbf{u}(\mathbf{r}(u,v))\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{-h/2}^{h/2}(R^3\cos^3 u\mathbf{i}+Rv^2\sin u\mathbf{j}-R^2v\cos^2 u\mathbf{j})\cdot(R\cos u\mathbf{i}+R\sin u\mathbf{j})\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{-h/2}^{h/2}\left(R^4\cos^4 u+R^2v^2\sin^2 u\right)\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u \\
&= \int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{3\pi}{4}R^4+\pi R^2v^2\right)\mathrm{d}v \\
&= \frac{3\pi}{4}hR^4+\frac{\pi}{12}h^3R^2.
\end{aligned}$$

7. (8p) Számítsa ki az $\mathbf{u}(x,y,z) = (xz^2 - 2x^2y)\mathbf{i} - 4x^2z\mathbf{j} + (6xy + 4xyz)\mathbf{k}$ vektormező integrálját az $x^2 + y^2 + z^4 = 1$ egyenletű felületen kifelé mutató irányítás mellett.

   Megoldás. A megadott felület zárt, tehát használhatjuk a Gauss-Osztrogradszkij-tételt. A vektormező divergenciája

$$\operatorname{div}\mathbf{u}(x,y,z) = \frac{\partial(xz^2 - 2x^2y)}{\partial x} + \frac{\partial(-4x^2z)}{\partial y} + \frac{\partial(6xy + 4xyz)}{\partial z} = z^2.$$

   Ezt a skalármezőt kell az $x^2 + y^2 + z^4 \leq 1$ tartományon integrálni. Hengerkoordinátákra érdemes áttérni: $\mathbf{r}(r,\phi,z) = r\cos\phi\mathbf{i} + r\sin\phi\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, a Jacobi-determináns r, a paramétertartomány $-1 \leq z \leq 1$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq r \leq \sqrt{1 - z^4}$. Így az integrál

$$\begin{aligned}
\int_{\partial V} \mathbf{u} \cdot \mathrm{d}\mathbf{A} &= \int_V \operatorname{div}\mathbf{u}\,\mathrm{d}V \\
&= \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1-z^4}} z^2 r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z \\
&= 2\pi\int_{-1}^{1} z^2\frac{1 - z^4}{2}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \\
&= \frac{8\pi}{21}.
\end{aligned}$$