

A feladatok megoldására 90 perc áll rendelkezésre.

1. ($3 \times 2p$) Döntse el, hogy az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis.

- a) Az $y' = 2\sqrt{|y|}$ differenciálegyenletnek bármely kezdeti feltétel mellett létezik lokális megoldása.
- b) Ha $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ k -szor folytonosan differenciálható, akkor az $y' = f(x, y)$ differenciálegyenlet megoldásai $k + 1$ -szer folytonosan differenciálhatóak.
- c) Bármely inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldásai vektorteret alkotnak.

Megoldás.

- a) Igaz. Az egyenlet explicit, a jobb oldal az egész síkon folytonos, tehát a Cauchy-Peano-tétel miatt bármilyen kezdeti feltétel mellett létezik lokális megoldás.
- b) Igaz. A $k = 0$ eset az egyenlettel ekvivalens integrálegyenletből következik deriválással, a $k > 0$ eset pedig a differenciálegyenletből teljes indukcióval és a láncszabály felhasználásával ($y'(x) = f(x, y(x))$ mindkét oldalát deriválva).
- c) Hamis. Homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldásai alkotnak vektorteret, az inhomogén egyenlet megoldásai egy ilyen altér eltoltját alkotják.

2. (4p) Mondja ki a Picard-Lindelöf-tételt.

Megoldás. Legyen $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ nyílt, $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos, a második (vektor) változójában Lipschitz-folytonos. Ekkor bármely $(x_0, \mathbf{y}_0) \in D$ esetén létezik és egyértelmű az $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(x, \mathbf{y})$ differenciálegyenlet $\mathbf{y}(x_0) = \mathbf{y}_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása.

3. (8p) Határozza meg az $y' = (\cos x)y$ differenciálegyenlet $y(0) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldásának szukcesszív approximációjával kapott n . közelítő függvényt. Mi a függvény-sorozat limesze?

Megoldás. A függvényt sorozat 0. tagja $\varphi_0(x) = 1$, a továbbiakat a

$$\varphi_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x (\cos \xi) \varphi_k(\xi) \, d\xi$$

rekurzió határozza meg. Az első néhány függvény

$$\varphi_0(x) = 1$$

$$\varphi_1(x) = 1 + \sin x$$

$$\varphi_2(x) = 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2}$$

$$\varphi_3(x) = 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{6}$$

$$\varphi_4(x) = 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{\sin^3 x}{6} + \frac{\sin^4 x}{24},$$

ebből sejthetjük, hogy

$$\varphi_k(x) = \sum_{i=0}^k \frac{\sin^i x}{i!}.$$

Valóban:

$$\begin{aligned} 1 + \int_0^x (\cos \xi) \sum_{i=0}^k \frac{\sin^i x}{i!} d\xi &= 1 + \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \int_0^x \cos \xi \sin^i \xi d\xi \\ &= 1 + \sum_{i=0}^k \frac{1}{i!} \frac{\sin^{i+1} x}{i+1} \\ &= \sum_{i=0}^{k+1} \frac{\sin^i x}{i!} = \varphi_{k+1}(x). \end{aligned}$$

A függvénytörzsorozat mindenhol abszolút konvergens, határértéke

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\sin^i x}{i!} = e^{\sin x}.$$

4. (8p) Oldja meg a $x^2 y' = x^2 + xy - y^2$ differenciálegyenletet $y(1) = 0$ kezdeti feltétel mellett.

Megoldás. Az egyenlet explicit alakban

$$y' = 1 + \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2,$$

a jobb oldal csak y/x függvénye, tehát $u(x) = y(x)/x$ helyettesítéssel szétválasztható egyenlethez jutunk. $y' = xu' + u$ alapján

$$\begin{aligned} xu' + u &= 1 + u - u^2 \\ xu' &= 1 - u^2 \\ \frac{u'}{1 - u^2} &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Integráljuk mindkét oldalt 1-től x -ig (a változót előzetesen pl. ξ -re cserélve):

$$\begin{aligned} \ln x &= \int_1^x \frac{1}{\xi} d\xi \\ &= \int_1^x \frac{u'(\xi)}{1 - u(\xi)^2} d\xi \\ &= -\frac{1}{2} \int_1^x u'(\xi) \left(\frac{1}{u+1} - \frac{1}{u-1} \right) d\xi \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{1+u(x)}{1-u(x)} - \frac{1}{2} \ln \frac{1+u(1)}{1-u(1)} = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u(x)}{1-u(x)}. \end{aligned}$$

Ebből

$$y(x) = xu(x) = x \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

5. (8p) Határozza meg a $(2xy^3 + y) + (-x + x^2 y^2) y' = 0$ differenciálegyenlet $y(2) = 2$ kezdeti feltételt kielégítő megoldását.

Megoldás. Az egyenlet $P(x, y) + Q(x, y) y' = 0$ alakú, ahol $P(x, y) = 2xy^3 + y$ és $Q(x, y) = -x + x^2 y^2$. Nem egzakt, viszont létezik csak y -től függő multiplikátor:

$$\ln |M(y)| = \int \frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} dy = \int \frac{-1 + 2xy^2 - (6xy^2 + 1)}{2xy^3 + y} dy = \int -\frac{2}{y} dy = -2 \ln y,$$

tehát $M(y) = \frac{1}{y^2}$. Eszerint a $(2xy + \frac{1}{y}) + (-\frac{x}{y^2} + x^2)y' = 0$ egyenlet már egzakt. Egy potenciál

$$u(x, y) = \int_0^x (2\xi + 1) d\xi + \int_1^y \left(-\frac{x}{\eta^2} + x^2\right) d\eta = x^2y + \frac{x}{y}.$$

Az általános megoldás implicit alakban $u(x, y(x)) = C$, ahol C paraméter. A kezdeti feltétel alapján $C = 9$.

6. (8p) Az

$$y' = -\frac{\cos(xy - 1)}{x^2} - \sin(x) \ln(xy)$$

differenciálegyenlet $y(1) = 1$ kezdeti feltételt kielégítő megoldása $y(x) = \frac{1}{x}$. Határozza meg a megoldás kezdeti feltétel szerinti deriváltját.

Megoldás. A jobb oldal y szerinti deriváltja $\frac{\sin(xy-1)}{x} - \frac{\sin x}{y}$, ebbe kell a megadott megoldást behelyettesíteni: $-x \sin x$. Ha a kezdeti feltétel szerinti derivált $D(x)$, vagyis $D(x) = \frac{\partial}{\partial y_0} Y(x, y_0)$, ahol $x \mapsto Y(x, y_0)$ az $y(0) = y_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás, akkor $D(0) = 1$ és

$$D'(x) = (-x \sin x) D(x).$$

Az egyenlet szétválasztható, általános megoldása

$$\begin{aligned} \ln D(x) &= - \int x \sin x \, dx \\ &= -x(-\cos x) + \int (-\cos x) \, dx = x \cos x - \sin x + C. \end{aligned}$$

A kezdeti feltétel alapján $C = -\cos(1) + \sin(1)$, tehát

$$D(x) = e^{x \cos(x) - \sin(x) - \cos(1) + \sin(1)}.$$

7. (8p) Határozza meg az $(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2$ differenciálegyenlet általános megoldását, ha a hozzá tartozó homogén egyenletnek $y_1(x) = x$ és $y_2(x) = e^x$ megoldása.

Megoldás. A homogén egyenlet általános megoldásának ismeretében az inhomogén egyenletet az állandók variálásával oldhatjuk meg. Eszerint a megoldás $y(x) = c_1(x)x + c_2(x)e^x$ alakú, ahol

$$\begin{aligned} xc'_1 + e^x c'_2 &= 0 \\ c'_1 + e^x c'_2 &= x - 1. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldva majd integrálva

$$\begin{aligned} c'_1(x) &= -1 & c_1(x) &= -x + C_1 \\ c'_2(x) &= xe^{-x} & c_2(x) &= -xe^{-x} - e^{-x} + C_2 \end{aligned}$$

adódik, tehát az általános megoldás

$$y(x) = -x^2 + C_1x - x - 1 + C_2e^x.$$