

Matematika A3 szigorlat – 2014. május 27.

Elmélet ($6 \times 4 + 2 \times 3 = 30$ pont)

1. Definiálja az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény x_0 pontbeli folytonosságát.
2. Mondja ki a $\frac{0}{0}$ típusú határértékre vonatkozó L'Hospital-szabályt.
3. Mondja ki a numerikus sorokra vonatkozó majoránskritériumot.
4. Hogyan néz ki egy T szerint periodikus $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Fourier-sora, és hogyan lehet kiszámolni az együtthatóit?
5. Definiálja az $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltját.
6. Írja fel egy közönséges, elsőrendű, lineáris, inhomogén kezdetiérték-probléma általános alakját.
7. Mit nevezünk egy mátrix rangjának?
8. Mondja ki a Stokes-tételt.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi numerikus sorozatok határértékét. (5 + 5 pont)

$$a_n = \left(\frac{2n^2 + n + 2}{n(1 + 2n)} \right)^{2n^2 + n}$$

$$b_n = \frac{n^2 + n \cos(3n) - 7}{2^{-n} + 3n^2 + n}$$

2. Végezze el az $f(x) = (x^2 - 1)^2$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
3. Határozza meg az

$$A = \begin{bmatrix} -14 & -7 & 12 \\ 2 & 1 & 0 \\ -16 & -8 & 15 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

4. Hol van lokális szélsőértéke az $f(x, y) = x^3 + 4xy - x + y + y^2$ függvénynek és milyen típusú?
5. Létezik-e vektorpotenciálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = x(z^2 - y^2)\mathbf{i} + y(x^2 - z^2)\mathbf{j} + z(y^2 - x^2)\mathbf{k}$ vektormezőnek? Ha igen, adjon meg egyet. Mennyi \mathbf{u} integrálja a $(2, 3, -2)$ középpontú, 5 egység sugarú gömb felszínén kifelé mutató irányítás mellett?
6. Integrálja az

$$\mathbf{u} = \frac{1 - y^2}{x}\mathbf{i} + (y + 2 \cos z)\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$$

vektormezőt az $\mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ térgörbe $0 \leq t < \frac{\pi}{2}$ szakaszán.

7. Laplace-transzformáció segítségével oldja meg az $y'' + 4y' + 3y = 8e^x$ differenciálegyenletet $y(0) = 4$, $y'(0) = -4$ kezdeti feltétel mellett. (Az $f(x) = e^{\alpha x}$ függvény Laplace-transzformáltja $\mathcal{L}f(z) = \frac{1}{z - \alpha}$.)