

Matematika A3 szigorlat – 2014. június 3.

Elmélet ($6 \times 4 + 2 \times 3 = 30$ pont)

1. Mit értünk egy z komplex szám trigonometrikus alakján? Írja fel trigonometrikus alakban az $1 + \sqrt{3}\mathbf{i}$ számot.
2. Mikor nevezünk egy sorozatot konvergensnek?
3. Igaz-e a következő állítás? “Az f egyváltozós valós függvény folytonos az x_0 pontban, ha x_0 -ban létezik a véges jobb és baloldali határérték, és a kettő egyenlő.”
4. Mik a Leibniz-típusú sorok? Adjon példát is rá.
5. Definiálja az A mátrix inverzét és adjon szükséges és elégséges feltételt annak létezésére.
6. Írja fel annak a síknak az egyenletét, amely az $f(x, y)$ differenciálható függvény grafikonját az $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ pontban érinti.
7. Mit nevezünk egzakt differenciálegyenletnek?
8. Mondja ki a Gauss-Osztrogradszkij-tételt.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az alábbi határozott integrálok értékét. (5 + 5 pont)

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x \, dx \qquad \int_0^1 (\ln x)^2 \, dx$$

2. Végezze el az $f(x) = xe^{-x^2}$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
3. Írja fel az

$$f(x) = -\frac{x^2 + 3x + 5}{(x-1)(x+2)^2}$$

függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor-sorát.

4. Határozza meg az

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -8 & -7 & 6 \\ -4 & -4 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

mátrix sajátértékeit és sajátvektorait.

5. Létezik-e (skalár)potenciálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = x(x^2 - y^2 - z^2)\mathbf{i} + y(-x^2 + y^2 - z^2)\mathbf{j} + z(-x^2 - y^2 + z^2)\mathbf{k}$ vektormezőnek? Ha igen, adjon meg egyet. Mennyi \mathbf{u} integrálja az x - y síkban fekvő, origó középpontú egységkör mentén pozitív körüljárás szerint?
6. Integrálja az $\mathbf{u} = z\mathbf{i} + \mathbf{j} + (1-x)\mathbf{k}$ vektormezőt az origó középpontú egységömb felületének $z \geq 0$ felén kifelé mutató irányítás mellett.
7. Határozza meg az $y'' + 2y' + y = 2e^{-x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.