

Matematika A3 szigorlat – 2014. június 17.

Elmélet ($6 \times 4 + 2 \times 3 = 30$ pont)

1. Mit értünk egy z komplex n . gyöke alatt? Adja meg a $2i$ négyzetgyökeit algebrai alakban.
2. Írja fel az f differenciálható függvény grafikonjához az $(x_0, f(x_0))$ pontban húzott érintő egyenletét.
3. Mikor van az $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszernek 0, 1 illetve végtelen sok megoldása? Adjon feltételt az A mátrix és a kibővített mátrix rangja segítségével.
4. Definálja az $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény (x_0, y_0, z_0) pontbeli differenciálhatóságát.
5. Mit nevezünk abszolút konvergencia numerikus sornak? Adjon példát olyan sorra, amely konvergencia, de nem abszolút konvergencia.
6. Mikor nevezünk egy $\mathbf{u} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ vektormezőt potenciálosnak?
7. Mondja ki a Gauss-Ostrogradskij-tételt.
8. Mit nevezünk egzakt differenciálegyenletnek?

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az

$$\int_0^1 \sqrt{x} \ln x dx$$

határozott integrál értékét.

2. Végezze el az

$$f(x) = -\frac{x}{1+x^2}$$

függvény teljes függvényvizsgálatát.

3. Írja fel az

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } 2k\pi < x < (2k+1)\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ -1 & \text{ha } (2k+1)\pi < x < (2k+2)\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény Fourier-sorát.

4. Hol van lokális szélsőértéke az $f(x, y) = -x^2 + y^3 + 3xy + 2x + y^2$ függvénynek? Milyen típusú?
5. Létezik-e (skalár)potenciálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = (y+z)\mathbf{i} + (-x+z)\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ vektormezőnek? Ha igen, adjon meg egyet. Mennyi \mathbf{u} integrálja az x - y síkban fekvő, origó középpontú egységkör mentén pozitív körüljárás szerint?
6. Oldja meg az $xy' + y = e^{-x}$ differenciálegyenletet $y(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett.
7. Határozza meg az $y'' + 8y' + 15y = e^{-3x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.