

Matematika A3 szigorlat – 2016. február 24.

Elmélet ($6 \times 4 + 2 \times 3 = 30$ pont)

1. Mit értünk egy z komplex szám n . gyöke alatt? Adja meg a $-3i$ négyzetgyökeit algebrai alakban.
2. Definiálja egy valós számsorozat határértékét.
3. Mondja ki a Lagrange-féle középértéktételt.
4. Bizonyítsa be, hogy a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ sor divergens.
5. Definiálja az egyenletes konvergencia fogalmát. Adjon példát olyan függvénysozatra, amely $[0, 1]$ minden pontjában konvergens, de nem egyenletesen konvergens ezen az intervallumon.
6. Mikor mondjuk, hogy a $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ vektorok lineárisan függetlenek?
7. Mit nevezünk konzervatív (skalárpotenciálos) vektormezőnek?
8. Mondja ki a Stokes-tételt.
9. Definiálja a Lipschitz-folytonosság fogalmát.
10. Mondja ki a Picard-Lindelöf-tételt.

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Számítsa ki az

$$\int x^2 \cos^2 x \, dx$$

határozatlan integrált.

2. Végezze el az $f(x) = x^2 \ln x$ függvény teljes függvényvizsgálatát.
3. Határozza meg a

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

mátrix inverzét.

4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x, y) = x^4 + y^2 - 2xy$ függvény szélsőértékei?
5. Integrálja az $\mathbf{u}(x, y, z) = xz^2\mathbf{i} + yz^2\mathbf{j}$ vektormezőt az origó középpontú R sugarú gömb felületén kifelé mutató irányítás mellett.
6. Oldja meg a $\sqrt{1+x^2}y' - y = 1$ differenciálegyenletet.
7. Számítsa ki az

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ 2 - x & \text{ha } 1 \leq x < 2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

függvény Laplace-transzformáltját.