

Matematika A3 szigorlat – 2016. június 7.

Elmélet ($10 \times 3 = 30$ pont)

1. Milyen $q \in \mathbb{R}$ esetén konvergens az $a_n = aq^n$ mértani sorozat? Mi a határértéke?
2. Definiálja egy f függvény x_0 pontbeli deriváltját.
3. Definiálja a Riemann-integrál fogalmát.
4. Mit jelent az, hogy az $f(x, y)$ függvény differenciálható az (x_0, y_0) pontban?
5. Ismertesse a Gauss-elimináció módszerét és egy alkalmazását.
6. Mit értünk egy hatványsor konvergenciasugara alatt? Adjon példát olyan hatványsorra, amelynek a konvergenciasugara 1 és az $x = 2$ és $x = 4$ pontokban is konvergens.
7. Ismertesse a felületi integrál kiszámításának módját.
8. Adjon példát olyan síkbeli vektormezőre, amelynek rotációja az egész értelmezési tartományon 0, de nincsen potenciálfüggvénye.
9. Mondja ki a Picard-Lindelöf-tételt.
10. Definiálja a lineáris állandó együtthetős homogén differenciálegyenletek karakterisztikus egyenletét. Hogyan lehet ennek segítségével meghatározni az általános megoldást?

Feladatok ($7 \times 10 = 70$ pont)

1. Határozza meg az alábbi sorozatok határértékét.

$$a_n = \ln n - \sqrt{\ln^2 n + \ln n + \sin n} \qquad b_n = \frac{n^3 - n^{2 \arctan n}}{7n + \frac{9^n}{n!} + (2n)^{-n}}$$

2. Számítsa ki az alábbi integrált.

$$\int \frac{3x^2 + 30}{x^3 - 2x^2 + 10x} dx$$

3. Határozza meg az $f(x) = \ln(2 + x^2)$ függvény $x_0 = 0$ középpontú Taylor-sorát és annak konvergenciasugarát.
4. Hol vannak és milyen típusúak az $f(x, y) = -x^2 + 6xy - 7y^2 - y^4$ függvény lokális szélsőértékei?
5. Van-e az

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \frac{z}{y + xz} \mathbf{i} - \frac{xz}{y^2 + xyz} \mathbf{j} + \frac{x}{y + xz} \mathbf{k}$$

vektormezőnek potenciálja az $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ tartományon? Számítsa ki \mathbf{u} integrálját az $\mathbf{r}(t) = (4 + \cos t)\mathbf{i} + (9 - \sin t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$ körív mentén a 0 és $\pi/2$ paraméterértékek között.

6. Határozza meg az $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ differenciálegyenlet általános megoldását.
7. Laplace-transzformáció segítségével oldja meg az $y'' + y' - 20y = 38x^{18} + 2x^{19} - 2x^{20}$ differenciálegyenletet $y(0) = 0$, $y'(0) = 9$ kezdeti feltétel mellett.